

Aufgabe 2

a) $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} = 3\vec{a}$

b) $\vec{a} - 2\vec{a} = -\vec{a}$

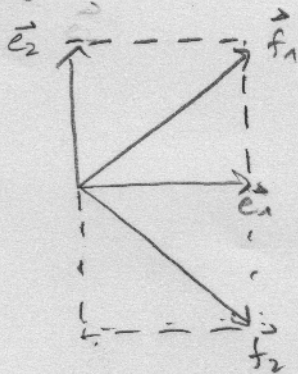
d) $\vec{a} + 2(\vec{b} - \vec{a}) = 2\vec{b} - \vec{a}$

e) $\vec{c} = \vec{c} - (\vec{a} + \vec{a} - \vec{b})$
 $= \vec{c} - \vec{a} - \vec{a} + \vec{b}$

c) $3\vec{a} + \vec{b} - \vec{a} = 2\vec{a} + \vec{b}$

f) $\vec{c} - (-\vec{b} - \vec{a}) = \vec{c} + \vec{b} + \vec{a}$

g) $2\vec{a} + 22\vec{b} = 2(\vec{a} + 11\vec{b})$ h) $\vec{a} - \frac{2}{2}(\lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}) = -\vec{a} + 2\vec{b}$

Aufgabe 3

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_2} = 0 \cdot \vec{f}_1 + 1 \cdot \vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_1}}}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_2} = 1 \cdot \vec{f}_1 + 1 \cdot \vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_1 - \vec{e}_2 = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1}}}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_2} = 1 \cdot \vec{f}_1 - 1 \cdot \vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_1}}}$

d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_2} = 3 \cdot \vec{f}_1 + 2 \cdot \vec{f}_2 = 3\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_1}}}$

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_2} = \frac{1}{2} \vec{f}_1 - \vec{f}_2 = \frac{1}{2} \vec{e}_1 + \frac{1}{2} \vec{e}_2 - \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}_{B_1}}}$

f) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_1 - \vec{e}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}_{B_1}$
 $= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}_{B_1}}}$

Aufgabe 4

a) I) $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \frac{3\lambda_1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\lambda_2 \\ \frac{4}{3}\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\lambda_2 \\ 4\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(\lambda_1 + \lambda_2) \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 \end{pmatrix}$

$\neq 0 \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \neq 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ linear unabhängig}$

II) da $-\frac{2}{3}\vec{b} = \vec{c} \Rightarrow \vec{b} \text{ und } \vec{c} \text{ linear abhängig}$

III) $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{c} = 2\lambda_1 \vec{a} + \frac{1}{4}\lambda_2 \vec{c} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda_2 \\ -2\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 - \lambda_2 \\ 3\lambda_1 - 2\lambda_2 \end{pmatrix}$

$\neq 0 \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \neq 0 \Rightarrow \vec{a} \text{ und } \vec{c} \text{ linear unabhängig}$

b)

3 linear unabhängige Vektoren bilden immer eine Basis von $\mathbb{R}^3$

Freie Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Lehrstuhl für Theoretische Physik (WE 5)
Tel: (030) 838 55 03 / 46 59
Fax: (030) 838 55 03
E-Mail: info@physik.fu-berlin.de

$$\Rightarrow \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 3\lambda_1 \\ 2\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\lambda_2 \\ 4\lambda_2 \\ 1\lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\lambda_3 \\ 6\lambda_3 \\ 4\lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 6\lambda_3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear unabhängig und bilden somit eine Basis von $\mathbb{R}^3$

Aufgabe 1: (Beispielkluft)

a) $\vec{x} =$

$\vec{a} = \nearrow \quad \vec{b} = \downarrow \quad \vec{c} = \nearrow \quad \vec{c} = \nwarrow$

b) $\vec{y} =$

c) $\vec{z} =$

Aufgabe 5

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(a.) \quad \vec{a} + 3\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 0+6 \\ 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{b.)} \quad 2\vec{a} - \vec{b} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(b.) \quad \vec{a} = 1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

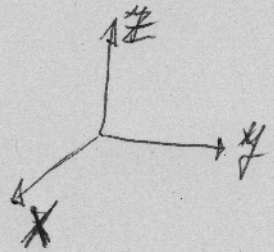
$$\vec{b} = -1\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 1\vec{e}_3$$

$$(c.) \quad \vec{c} = -3\vec{e}_3 + 7\vec{e}_2 = -3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

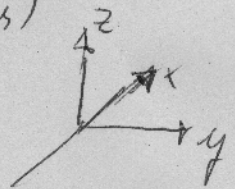
rechtshändig

$$\hat{x} = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{y} = \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{z} = \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



linkshändig (angegeben in Komponentenschreibweise
zur obigen rechtshändigen Basis)

$$\hat{x} = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{y} = \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{z} = \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Aufgabe 7

$$(a) \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_3$$

Aufgabe 8

$$(a) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = -3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{b} = (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$$

$$(b) \quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1)} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \angle \vec{a} \vec{c} = 90^\circ$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \angle \vec{b} \vec{c} = 90^\circ$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\angle \vec{a} \vec{b}) \Rightarrow \angle \vec{a} \vec{b} = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{-3}{\sqrt{2} \sqrt{6}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{-3}{2\sqrt{3}}\right) \\ &= \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 150^\circ \end{aligned}$$

$$(c) \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| |\vec{y}| \cos 60^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$|\vec{x}| = |\vec{y}| = 2$$

$$\angle \vec{x} \vec{y} = 60^\circ$$