

Aufgabe 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ -2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot a - 1 \cdot b \\ 1 \cdot a + 1 \cdot b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ a+b \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Basis 1) $A \vec{e}_1 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$

$A \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$

$\Rightarrow \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1}$

$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_1}$

$\Rightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_1}$

$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_1} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_1}$

anderseits:

allgemein für Basisvektoren!

$$\begin{cases} A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} + 0 \cdot A_{12} \\ A_{21} + 0 \cdot A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot A_{11} + A_{12} \\ 0 \cdot A_{21} + A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix} \end{cases}$$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{B_1}$

Basis 2)

$A f_1 = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_2} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix}$

$A f_2 = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_2} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{B_2}$

Nur die Tatsache, dass Basisvektoren immer die Darstellung

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bezüglich ihrer

Basis haben!

Aufgabe 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (1 \ 3)$$

(a) mögliche Produkte: AB
 BA
 CB

$$(b) \quad CB = (1 \ 3) \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 3 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ = (1 \ 3 \ 4)$$

$$\Rightarrow 3CB = (3 \ 9 \ 12)$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -1 \\ 18 & 12 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BAB = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -1 \\ 18 & 12 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 15 \\ 17 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$CBAB = (1 \ 3) \begin{pmatrix} 10 & 15 & 15 \\ 17 & 9 & -2 \end{pmatrix} = (67 \ 42 \ 9)$$

$$\Rightarrow CBAB - 3CB = (67 \ 42 \ 9) - (3 \ 9 \ 12) \\ = (58 \ 33 \ -3)$$

Aufgabe 3:

Wenn A eine lineare Abbildung ist, muss gelten:

$$A(\vec{u} + \vec{b}) = A\vec{u} + A\vec{b}$$

Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$:

$$A(\vec{u} + \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 + b_1 \\ u_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}(u_1 + b_1) + a_{12}(u_2 + b_2) \\ a_{21}(u_1 + b_1) + a_{22}(u_2 + b_2) \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \end{pmatrix}}_{A\vec{u}} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 \end{pmatrix}}_{A\vec{b}}$$

$$= A\vec{u} + A\vec{b}$$

Damit ist die Abbildung A linear.

Aufgabe 5:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$
$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

$$\vec{a}^T = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$$

$$\vec{a}^T \vec{b} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

da eine 1×1 -
Matrix ein
Skalar (eine Zahl)
ist.

Aufgabe 6:

- a) Die Drehung des Vektors $\vec{a}$ um den Winkel φ wird angegeben durch $R(\varphi) \cdot \vec{a}$. Der Betrag dieses Vektors ist gegeben durch

$$(R(\varphi) \vec{a}) \cdot (R(\varphi) \vec{a}) \stackrel{\text{Aufgabe 5}}{=} (R(\varphi) \vec{a})^T (R(\varphi) \vec{a}) \quad (1)$$

wegen $(A B)^T = B^T A^T$ wird (1) zu

$$\vec{a}^T R^T(\varphi) R(\varphi) \vec{a} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} R^T(\varphi) \cdot R(\varphi) &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi \\ \cos \varphi \sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi & \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \end{aligned}$$

Da $\mathbb{1} \cdot \vec{a} = \vec{a}$, wird also aus (2)

$$\vec{a}^T \underbrace{R^T(\varphi) R(\varphi)}_{=\mathbb{1}} \vec{a} = \vec{a}^T \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{a}$$

Der Betrag des gedrehten Vektors ist also gleich dem Betrag des Ausgangsvektors.

Aufgabe 6

b) Das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kann auch geschrieben werden als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})).$$

Es ist $(R(\varphi) \vec{a}) \cdot (R(\varphi) \vec{b})$

$$= (R(\varphi) \vec{a})^T (R(\varphi) \vec{b})$$

Aufg. 5

$$\stackrel{\uparrow}{=} \vec{a}^T R^T(\varphi) R(\varphi) \vec{b}$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} \vec{a}^T \vec{b}$$

Aufg. 6a)

$$= \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Das Skalarprodukt, damit also auch der Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist also invariant unter Drehungen.

Aufgabe 7

a)

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 2$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 0 \cdot 1 = 2$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = -1$$

$$\begin{aligned} \det D &= \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &\quad + 0 \cdot \begin{vmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det E &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

$$\det F = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot 1 = \underline{\underline{10}}$$

$$b) A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A \cdot B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \underline{4} = \det A \cdot \det B$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A \cdot C) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \underline{-2} = \det A \cdot \det C$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(B \cdot C) = \underline{-2} = \det B \cdot \det C$$

$$E \cdot F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 5 & 8 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(E \cdot F) = 5 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \cdot [32 - 14] - 5 \cdot [24 - 8]$$

$$= 5 \cdot (32 - 24 + 8 - 14) = \underline{10} = \det(E) \cdot \det(F)$$

$$F \cdot E = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 14 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(F \cdot E) = 0 \cdot \begin{vmatrix} 14 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 14 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -(27 - 2) + (63 - 28)$$

$$= \underline{10} = \det(E) \cdot \det(F)$$

$\Rightarrow$ Für alle Matrizen F, E gilt

$$\det(E \cdot F) = \det(F \cdot E) = \det(F) \cdot \det(E)$$

(Determinantenproduktatz)

Aufgabe 8

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\det(a_1 a_2 a_3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= [4 \cdot (-3) - 1 \cdot (-2)] - 2 \cdot [3 \cdot (-3) - 2 \cdot (-2)] + 0 \cdot [3 \cdot 1 - 2 \cdot 4]$$

$$= [-12 + 2] - 2 \cdot [-9 + 4] + 0 \cdot [3 - 8]$$

$$= -10 - 2 \cdot (-5) + 0 \cdot (-5)$$

$$= -10 + 10$$

$$= 0$$

$\Rightarrow \{a_1, a_2, a_3\}$ sind nicht

linear unabhängig und bilden
folglich keine Basis des $\mathbb{R}^3$

Aufgabe 9

Das Skalarprodukt dreier Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

lässt in Komponentendarstellung mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{a_1 b_2 c_3} + \underbrace{a_2 b_3 c_1} + \underbrace{a_3 b_1 c_2} - \underbrace{a_1 b_3 c_2} - \underbrace{a_2 b_1 c_3} - \underbrace{a_3 b_2 c_1}$$

$$= \left| \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \right|$$

Aufgabe 10

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(a) \quad A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -A$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

$$A^5 = A \cdot A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$(b) \quad \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$\exp(\varphi A) = \frac{1}{0!} \varphi^0 A^0 + \frac{1}{1!} \varphi^1 A^1 + \frac{1}{2!} \varphi^2 A^2 + \frac{1}{3!} \varphi^3 A^3 \\ + \frac{1}{4!} \varphi^4 A^4 + \frac{1}{5!} \varphi^5 A^5 + \dots$$

$$= \frac{1}{1} \cdot 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1} \cdot \varphi \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \varphi^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \varphi^3 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{24} \varphi^4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{120} \varphi^5 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \varphi^{2k} \mathbb{1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \varphi^{2k+1} A$$