Aufgabe 1: Vektoren in der Ebene

Zeichnen Sie vier beliebige Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, und $\mathbf{d}$ in der Ebene, und bestimmen Sie die Vektoren:

$$\text{a) } \mathbf{x} = \mathbf{a} - \mathbf{b} - (\mathbf{c} - \mathbf{d}), \quad \text{b) } \mathbf{y} = \mathbf{c} - (\mathbf{a} + \mathbf{d} - \mathbf{b}), \quad \text{c) } \mathbf{z} = \mathbf{b} - (\mathbf{a} - \mathbf{d}) + \mathbf{c}$$

Aufgabe 2: Umformungen

$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ... seien Vektoren und $\lambda \neq 0$ ein Skalar. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

$$\text{a) } \mathbf{a} + \mathbf{a} + \mathbf{a}, \quad \text{b) } \mathbf{a} - 2\mathbf{a}, \quad \text{c) } 3\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{a}, \quad \text{d) } \mathbf{a} + 2(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \quad \text{e) } \mathbf{y} = \mathbf{c} - (\mathbf{a} + \mathbf{d} - \mathbf{b}),$$

$$\text{f) } \mathbf{c} - (-\mathbf{b} - \mathbf{a}), \quad \text{g) } \lambda\mathbf{a} + 2\lambda\mathbf{b}, \quad \text{h) } \mathbf{a} - \frac{2}{\lambda}(\lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b})$$

Aufgabe 3: Basen

Gegeben seien die Basen $B_1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ und $B_2 = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ mit den Beziehungen $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{f}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. Benutzen sie die Komponentenschreibweise

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_{B_1} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 \tag{1}$$

(und analog für B_2), um die folgenden Vektoren von ihrer Komponentenschreibweise bezüglich der Basis B_2 in ihre Komponentenschreibweise bezüglich der Basis B_1 umzuschreiben.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_2}, \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B_2}, \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{B_2}, \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_2}, \quad \text{e) } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}_{B_2}, \quad \text{f) } \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}_{B_2}$$

$$\text{Beispiel: } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_2} = 2\mathbf{f}_1 = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{B_1}$$

Aufgabe 4: Lineare Abhängigkeit

(a) Welche der folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^2$ sind paarweise linear unabhängig?

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

(b) Bilden die drei folgenden Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 4/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: Rechnen in Komponenten

Bezüglich einer Basis B seien Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ gegeben durch

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_B, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B \quad (2)$$

- (a) Berechnen Sie $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$, $3(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ und $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ in Komponentendarstellung bezüglich B .
- (b) Die Vektoren der Basis B seien $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, und $\mathbf{e}_3$. Wie lauten $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ in Linearkombinationen der Basisvektoren?
- (c) Wie lautet $\mathbf{c} = -3\mathbf{e}_3 + 7\mathbf{e}_2$ in Komponentendarstellung bzgl. B ?

Aufgabe 6: Orthonormalsystem

Gegeben Sie ein links- sowie ein rechtshändiges Orthonormalsystem im $\mathbb{R}^3$ an.

Aufgabe 7: Komponenten

Gegeben sei eine Orthonormalbasis $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ eines Vektorraums V .

- (a) Wie lauten die Basisvektoren $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, und $\mathbf{e}_3$ in Komponentendarstellung bzgl. B ?
- (b) Zeigen Sie, dass die Komponenten eines Vektors $\mathbf{a} \in V$ bzgl. B durch $a_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{a}$ bestimmt sind ($i = 1, 2, 3$).

Aufgabe 8: Skalarprodukte

- (a) Sei B eine Orthonormalbasis eines dreidimensionalen Vektorraums V . Berechnen Sie alle Skalarprodukte zwischen den Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_B, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B \quad (3)$$

- (b) Berechnen Sie die Länge der Vektoren aus Teil a) und die Winkel zwischen ihnen.
- (c) Zwei Vektoren der Länge 2 schließen den Winkel 60° ein. Berechnen Sie ihr Skalarprodukt.

Aufgabe 9: Skalarprodukt und Geometrie

- (a) Zeigen Sie, dass $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = a^2 - b^2$. Was ist die geometrische Bedeutung im Falle $a = b$?
- (b) Zeigen Sie, dass für orthogonale Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$: $|(\mathbf{a} - \mathbf{b})|^2 = a^2 + b^2$.

Aufgabe 10: Dreieck

Ein Dreieck sei durch zwei seiner Seitenvektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}_B$ $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9/2 \end{pmatrix}_B$ gegeben, wobei $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ eine Orthonormalbasis.

- (a) Wie lang sind die drei Seiten?
- (b) Wie groß sind die drei Winkel?

Aufgabe 11: Dreieck

Betrachten Sie das Dreieck mit den Eckpunkten $\mathbf{a} = (1, 1)^T$, $\mathbf{b} = (3, 3)^T$ und $\mathbf{c} = (2, 4)^T$. Überprüfen Sie mit Hilfe des Skalarprodukts, ob es rechtwinklig ist.