Übungsblatt 5 — Brückenkurs WS 12/13

Aufgabe 1: Skalarprodukt und Geometrie

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = a^2 - b^2$. Was ist die geometrische Bedeutung im Falle $a = b$?

(b) Zeigen Sie, dass für orthogonale Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$: $|(\mathbf{a}-\mathbf{b})|^2 = a^2 + b^2$.

Aufgabe 2: Dreieck

Ein Dreieck sei durch zwei seiner Seitenvektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}_B \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9/2 \end{pmatrix}_B$ gegeben, wobei $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ eine Orthonormalbasis.

(a) Wie lang sind die drei Seiten?

(b) Wie groß sind die drei Winkel?

Aufgabe 3: Dreieck

Betrachten Sie das Dreieck mit den Eckpunkten $\mathbf{a} = (1,1)^T$, $\mathbf{b} = (3,3)^T$ und $\mathbf{c} = (2,4)^T$. Überprüfen Sie mit Hilfe des Skalarprodukts, ob es rechtwinklig ist.

Aufgabe 4: Skalar- und Vektorprodukt

(a) Bilde aus $\mathbf{a} = (1,2,3)^T$, $\mathbf{b} = (2,1,3)^T$, $\mathbf{c} = (2,0,1)^T$ die Größen

$$\mathbf{a}+\mathbf{b},\ \mathbf{a}-\mathbf{c},\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b},\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{c},\ \mathbf{a}\times\mathbf{b},\ \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).$$

(b) Berechne ebenso die Winkel $\measuredangle(\mathbf{a},\mathbf{b})$, $\measuredangle(\mathbf{b},\mathbf{c})$ und $\measuredangle(\mathbf{a},\mathbf{c})$.

(c) Welcher Vektor steht senkrecht auf $\mathbf{a} = (1,1,1)^T$ und $\mathbf{b} = (1,0,-1)^T$?

Aufgabe 5: Vektorprodukt

(a) Die Vektoren $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$ bilden ein rechtshändige Orhtonormalsystem.

Bestimmen Sie das Ergebnis der folgenden Vektorausdrücke:

a) $\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2$, b) $\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_1$, c) $\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1$, d) $\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_2$, e) $\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_3$, f) $\mathbf{e}_3\times(\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_1)$, g) $(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2)\times(\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_1)$

(b) Gegeben seien $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B$ und $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}_B$ bezüglich einer rechtshändigen Orthonormalbasis B.

Bestimmen Sie a) $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$, b) $\mathbf{p} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q})$.

Wie groß ist die Fläche des von $\mathbf{p}$ und $\mathbf{q}$ aufgespannten Parallelograms?

(c) Zwei Vektoren der Längen 2 und 3 schließen den Winkel $\pi/6$ ein. Wie groß ist ihr Vektorprodukt?

(d) Beweisen oder widerlegen Sie: Für beliebige Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ gilt: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$

Aufgabe 6: Vektorprodukt

Das Vektorprodukt von $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ ist deniert als

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, daß das Kreuzprodukt antisymmetrisch ist. Das heit, es gilt $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

(b) Zeigen Sie, daß $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ sowohl auf $\mathbf{a}$ als auch auf $\mathbf{b}$ senkrecht steht.

Aufgabe 7: Parallelepiped

(a) Ein Parallelepiped sei durch drei Vektoren $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}_B$ und $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_B$ gegeben (B Orthonormalbasis). Bestimmen Sie sein Volumen.

(b) Welches Volumen spannen die Vektoren $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ und $\mathbf{r}_3$ auf? ($B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ist eine rechtshändige Orthonormalbasis)

$\mathbf{r}_1 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{r}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$

Aufgabe 8: Gerade

Die Punkte A und B in einem Kartesischen Koordinatensystem haben folgenden Koordinaten: $A = (1, 2)$ und $B = (0, -2)$, $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ seien die entsprechenden Ortsvektoren. Beschreiben Sie die Gerade, die durch beide Punkte von A nach B verläuft in Vektor- sowie in Komponentendarstellung.

Aufgabe 9: Gerade und Normalenvektor

(a) Eine Gerade geht durch den Punkt $(1, 2)$ und hat die Steigung 2. Wie lautet die Parameterdarstellung?

(b) Wie lautet der Normalenvektor $\mathbf{n}$ mit Länge 1 zu dieser Gerade? Welchen Abstand hat die Gerade vom Ursprung?

(c) Wie lautet die funktionale Form der Gerade?

(d) Welchen Abstand hat die Gerade vom Ursprung?

Aufgabe 10: Ebene und Normalenvektor

(a) Welche Paare der drei folgenden Vektoren spannen eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ auf?

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

(b) Wie lauten die Normalenvektoren $\mathbf{n}$ mit Länge 1 zu diesen Ebenen?