Übungsblatt 6 Brückenkurs WS 12/13

Aufgabe 1: Matrixmultiplikation
Multiplizieren Sie

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Matrixmultiplikation

Gegeben seien folgende Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Welche Produkte zwischen je zwei dieser Matrizen lassen sich durch führen (AB, AC, etc.)?

(b) Berechnen Sie alle möglichen Produkte von a), sowie auch das Produkt: $CBAB - 3CB$.

Aufgabe 3: Lineare Abbildungen
Überprüfen Sie expizit dass eine allgemeine Koordinatentransformation

$$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}' = A\mathbf{a}$$

mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ eine lineare Abbildung ist.

Aufgabe 4: Koordinatentransformation

$B_1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ und $B_2 = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ seien zwei verschiedene Basen des Vektorraums $\mathbb{R}^2$.

Eine lineare Abbildung $A : V \to V$ ist vollständig beschrieben durch ihre Wirkung auf die Basisvektoren (Sie können sich von dieser Aussage auch mit Hilfe von Aufgabe 3 überzeugen). Wie lauten die Matrixdarstellungen von A in den angegebenen Basen, wenn

$$A\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2, \qquad A\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \tag{1}$$

bzw.

$$A\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2, \qquad A\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2? \tag{2}$$

Aufgabe 5: Skalarprodukt

Zeigen Sie, dass sich das Skalarprodukt von zwei Vektoren

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

auch als Matrixprodukt der $1\times n$-Matrix $\mathbf{a}^T$ und $n\times 1$-Matrix $\mathbf{b}$ schreiben lässt, d.h.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}^T\mathbf{b}$$

Aufgabe 6: Drehmatrix

Die allgemeine Form einer Drehmatrix im zwei-dimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$R(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Ferner seien $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ beliebiege Vektoren des $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, daß

(a) die Drehung des Vektors $\mathbf{a}$ um den Winkel ϕ, den Betrag des Vektors nicht ändert

(a) die Drehung der Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ um den Winkel ϕ, den Winkel $\measuredangle(\mathbf{a},\mathbf{b})$ nicht ändert

(Hinweis: Beutzen Sie Aufgabe 5)

Aufgabe 7: Determinanten

(a) Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie ausserdem noch die Determinanten von AB, AC , BC , EF und FE. Prüfen Sie, dass $|EF| = |E||F| = |FE|$.

Aufgabe 8: Determinante und lineare Unabhängigkeit Drei Vektoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig falls $\mathrm{Det}(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3) \neq 0$ Bilden die drei folgenden Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9: Determinante und Spatprodukt

Das Spatprodukt der drei Vektoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ ist definiert als

$$\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)$$

Zeigen Sie, dass dieses gleich $\mathrm{Det}(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3)$ ist.

Aufgabe 10: Funktionen von Matrizen

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Bestimmen Sie A^2, A^3, A^4 und A^5

(b) Benutzen Sie die Reihendarstellung der exp-Funktion und berechnen Sie $D = \exp(\phi A)$. Was beschreibt D?