

Aufgabe 1: Determinanten

(a) Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie ausserdem noch die Determinanten von AB , BA , EF und FE . Prüfen Sie, dass $|AB| = |A||B| = |BA|$, sowie $|EF| = |E||F| = |FE|$.

Aufgabe 2: Determinante und Spatprodukt

Das Spatprodukt der drei Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ ist definiert als

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

Zeigen Sie, dass dieses gleich $\text{Det}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ ist.

Aufgabe 3: Lineare Gleichungssysteme

Gegeben sind folgende lineare Gleichungssysteme:

$$8x - 3y = 11$$

$$5x + 2y = 34$$

und

$$2x + 3y - z = 2$$

$$x - y + z = 0$$

$$-3x - 5y + 2z = -1$$

- (a) Schreiben Sie diese in der Form: Matrix $\times$ Vektor = Vektor.
- (b) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme durch Gaußsches Eliminationsverfahren
- (c) In einem Dreieck ist ein Winkel doppelt so groß wie ein anderer, zusammen sind sie so groß wie der dritte. Bestimmen Sie die Winkel.

Aufgabe 4: Imaginäre Einheit

- (a) Berechnen Sie $3i + 5i$, $-2i + 4i$, i^2 , $(-i)^2$, $1 + (-i)^3$, $1 + (-i)^2$, i^3 , i^4 , i^5 , i^{12} , i^{17} , i^{23} , i^{1125}

Aufgabe 5: Komplexe Konjugation

Überprüfen Sie die folgenden Eigenschaften der komplexen Konjugation: Für komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ und reelle Zahlen λ_1, λ_2 gilt

- (a) $(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)^* = \lambda_1 z_1^* + \lambda_2 z_2^*$,
(b) $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$,
(c) $(z_1^*)^* = z_1$,
(d) $(z_1/z_2)^* = z_1^*/z_2^*$
(e) $\operatorname{Re} z_1 = \frac{1}{2}(z_1 + z_1^*)$ und $\operatorname{Im} z_1 = \frac{1}{2i}(z_1 - z_1^*)$

Aufgabe 4: Komplexe Zahlen

Berechnen Sie

- (a) $(3 + 2i) + (-7 - 0.5i)$, $(-40 + i) + (-2 + 3i)$, $2i + (-7 - 2i)$
(b) $(1 + i)(1 - 2i)$, $(1 + 2i)(1 - 2i)$, $(3 + 2i)(-7 - 0.5i)$, $(-40 + i)(-2 + 3i)$,
(c) $(1 + i)^4$, $(1 + i)^{13}$, $(1 + i\sqrt{3})^6$, $\frac{(1+i\sqrt{3})^3}{(1-i^2)}$, $\frac{(1+i)^5}{(\sqrt{3}+i)^2}$,
(d) $\frac{3+2i}{1-2i}$, $\frac{1+2i}{1-2i}$, $\frac{3-2i}{3+2i}$, $\frac{(1+2i)^2}{3-2i}$, $\frac{1+2i}{(3-2i)^2}$
(e) Sei $z_1 = 1 + 2i$ und $z_2 = 5 + 2i$. Was ist $z_1 + z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_2}{z_1}$, $z_2^* z_1$, $\frac{z_2}{z_1^*}$?