

Aufgabe 1: Polarkoordinaten

- (a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von

$$\frac{1+i}{2-3i}, \frac{1+i}{2+3i}, \frac{1-i}{2-3i}, (1+i)^{2n} + (1-i)^{2n}$$

- (b) Drücken Sie folgende Zahlen durch Betrag und Winkel aus, und stellen Sie sie in der komplexen Ebene dar

$$i, 1+i, 1-i, \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), -1, -i, -1+i, -1-i, (1+i)^2, (1-i)^2, (1+i)^4, 1/(1+i), 1/(1-i)^2,$$

- (c) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von

$$3e^{i\pi/4}, 2e^{3i\pi/2}, 10e^{i\pi}, e^{i\pi/6}, e^{i5\pi/6}$$

- (d) Bestimmen Sie Betrag und Argument von

$$\frac{1+i}{1-i}, \frac{1-i}{1+i}, 1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i, \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}, \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{201}$$

Aufgabe 2: Eulersche Formel

- (a) Benutzen Sie die Reihendarstellung von $\exp(x)$, $\cos(x)$ und $\sin(x)$ und beweisen Sie die Eulersche Formel

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$$

- (b) Benutzen Sie die Eulersche Formel um zu zeigen, dass

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$$

- (c) Berechnen Sie $\exp(z)$ für folgende Argumente:

$$z = i\pi, z = -2 + i\pi$$

Aufgabe 3: Komplexe Ebene

- (a) Zeichnen Sie die folgenden Punkte in der komplexen Ebene $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 5 + 2i$, $z_3 = 1 + 2i$, $z_4 = 5 + 2i$, $z_5 = 1 + 2i$ und $z_6 = 5 + 2i$.

- (b) Welcher Quadrant der komplexen Ebene wird durch z^2 auf die obere Halbebene abgebildet?

- (c) Wohin bildet $\exp(iz)$ die obere Halbebene $H_+ = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}z \geq 0\}$ ab? Ist diese Abbildung bijektiv?
- (d) Wohin bildet $\exp(iz)$ die untere Halbebene $H_- = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}z \leq 0\}$ ab?
- (e) Geben Sie einen rechnerischen Ausdruck an, der die Spiegelung an der imaginären Achse bewirkt.

Aufgabe 4: Wurzeln

- (a) Lösen Sie die folgende Gleichungen $z^2 + 1 = 0$, $z^2 + 27 = 2$, $(z - 2)^2 + 36 = 0$
- (b) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der Wurzel von i .
- (c) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der Wurzel von $-i$.
- (b) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der dritten Wurzel von 1.
- (c) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der vierten Wurzel von 16.
- (d) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der n -ten Wurzel von 1.
- (e) Können zwei verschiedene komplexe Zahlen eine gemeinsame dritte Wurzel haben?