Übungsblatt 1 — Brückenkurs WS 13/14

Aufgabe 1

(a) Beweisen Sie die Lösung für quadratische Gleichungen (Tipp: quadratische Ergänzung)

$$x^2 + px + q = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

(b) Geben Sie die Lösung der quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

an.

(c) Was ist die Lösung der quadratischen Gleichung

$$x(x - m) = 0 \ \ ?$$

(d) Bestimmen Sie die Lösung der Polynomgleichung

$$x^4 - 3x^2 - 1 = 0.$$

Aufgabe 2

(a) Die kubische Gleichung

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0$$

hat die Lösung $x = 2$. Bestimmen Sie durch Polynomdivision die anderen beiden Lösungen dieser Gleichung.

(b) Die Polynomgleichung

$$2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x = 0$$

hat die Lösungen $x = 0$ und $x = 1$. Bestimmen Sie durch Polynomdivision die anderen beiden Lösungen dieser Gleichung.

(c) Bestimmen Sie durch Polynomdivision das Verhalten von

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1}; \qquad f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2}$$

für große Werte von x. Vernachlässigen Sie Terme des Typs $1/x^n$ mit $n > 2$.

Aufgabe 3

Beweisen Sie die Formel

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

für die geometrische Reihe. Unter welcher Bedingung können Sie den Grenzübergang $N \to \infty$ bilden und was ist das Resultat?

Aufgabe 4

Ein Brückenbogen hat die Form einer Parabel mit Lagern bei $x = \pm 5$m und Scheitelhöhe 4m. Wie lautet die Gleichung der Parabel?

Aufgabe 5

Zeigen Sie, ausgehend von der in der Vorlesung bewiesenen Relation $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\,\cos\beta \pm \cos\alpha\,\sin\beta$, die folgenden trigonometrischen Identitäten

(a) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\,\cos\alpha$; $\qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

(b) $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)}$; $\qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos\alpha)}$

(c) $\sin\alpha\,\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$; $\qquad \sin\alpha\,\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$

(d) Drücken Sie $\sin 3\alpha$ durch $\sin\alpha$ und $\tan(\alpha + \beta)$ durch $\tan\alpha$ und $\tan\beta$ aus.

(e) Vereinfachen Sie

$$\frac{\cos\alpha(1 - \tan^2\alpha)}{\tan\alpha(\cot\alpha - 1)}.$$

Aufgabe 6

Berechnen Sie

(a) $\cos(\pi/4)$,

(b) $\sin(\pi/12)$,

(c) $\tan(\pi/8)$,

(d)* $\tan(\pi/5)$.

Aufgabe 7

Stellen Sie sich vor, die Erde trägt einen Gürtel um den Äquator. Nun verlängern Sie den Gürtel um einen Meter. Wie weit steht er ab? Was ist das Ergebnis, wenn Sie dies mit Ihrem eigenen Gürtel wiederholen?

Aufgabe 8

In dieser Aufgabe geht es um Grundlagen der Kombinatorik.

(a)
1. In einer Urne liegen N unterscheidbare Kugeln. Sie ziehen nacheinander k Kugeln ohne Zurücklegen. Wie viele unterschiedliche Ergebnisse ohne Berücksichtigung der Reihenfolge gibt es?
2. Die Wahrscheinlichkeit, beim Wurf einer Münze als Ergebis "Kopf" zu erhalten, sei p. Sie werfen die Münze N mal. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dabei insgesamt k mal Kopf zu erhalten? Hilft Ihnen dabei der erste Aufgabenteil?
3. Sie kennen den Binomialkoeffizienten $\binom{N}{k}$ aus der Vorlesung. Interpretieren Sie anschaulich die beiden Relationen

$$\binom{N}{k} = \binom{N}{N-k}, \qquad \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} = 1 \quad \text{für } 0 < p < 1.$$

(b) In einer Urne liegen N Kugeln, k weiße und $N-k$ schwarze. Sie entnehmen $l \leq k$ Kugeln ohne Zurücklegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß darunter genau $m \leq l$ weiße Kugeln sind?

Aufgabe 9*

Berechnen Sie

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n(n+1)}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} n$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} n(n-1)$.