

1a

$$x^2 + px + q = 0$$

quadratische Ergänzung: $(x + \frac{1}{2}p)^2 - \frac{1}{4}p^2 + q = 0$

$$\Leftrightarrow (x + \frac{1}{2}p)^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{2}p = \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}$$

1b

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Wenn $a \neq 0$: $a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Aus 1a: $x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$

oder $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Wenn $a = 0$: $x = -\frac{c}{b}$

1c

$$x(x-m) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = m$$

1d

$$x^4 - 3x^2 - 1 = 0$$

ist eine quadratische Gleichung für $y = x^2$:

$$y^2 - 3y - 1 = 0. \text{ Lösung: } y = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 1}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}}} \text{ oder } x = -\sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}}}$$

$$\text{oder } x = \sqrt{\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}} \text{ oder } x = -\sqrt{\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}}$$

2a

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0 \text{ hat die Lösung } x=2$$

$$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 2 \text{ enthält den Faktor } (x-2)$$

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} x-2 \overline{) x^3 - 6x^2 + 9x - 2} \quad \backslash \quad x^2 - 4x + 1 \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ -4x^2 \\ \underline{-4x^2 + 8x} \\ x \\ \underline{x - 2} \\ 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = (x-2)(x^2 - 4x + 1)$$

Die beiden anderen Lösungen sind Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 - 4x + 1 = 0$.

$$\text{Sie sind } x = 2 \pm \sqrt{3}$$

2b $2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x$ ist durch $x(x-1) = x^2 - x$ teilbar

Polynomdivision

$$\begin{array}{r} x^2 - x \overline{) 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x} \quad \backslash \quad 2x^2 - 3x - 1 \\ \underline{2x^4 - 2x^3} \\ -3x^3 + 2x^2 \\ \underline{-3x^3 + 3x^2} \\ -x^2 + x \end{array}$$

$$\Rightarrow 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x = x(x-1)(2x^2 - 3x - 1)$$

Die anderen beiden Lösungen sind die Lösungen der quadratischen Gleichung $2x^2 - 3x - 1 = 0$

$$\text{Sie sind } x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

2c

$$x^2+1 \overline{) x^2-2x+3}$$

$$\backslash 1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}$$

$$\begin{array}{r} x^2 \\ + 1 - \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2x+2 \\ -2x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2x \\ - \frac{2}{x} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +2+\frac{2}{x} \\ +2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +2+\frac{2}{x} \\ +2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +2+\frac{2}{x} \\ +2+\frac{2}{x^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} \\ \dots \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-2x+3}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \text{ plus Terme des Typs } \frac{1}{x^n} \text{ mit } n > 2$$

$$x^2+2 \overline{) x^3-3x^2+4x+1}$$

$$\backslash x-3+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}$$

$$\begin{array}{r} x^3 \\ + 2x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -3x^2+2x+1 \\ -3x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -3x^2 \\ -6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x+7 \\ 2x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x+\frac{4}{x} \\ 7-\frac{4}{x} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7-\frac{4}{x} \\ 7+\frac{14}{x^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7+\frac{14}{x^2} \\ -\frac{4}{x}+\frac{14}{x^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\frac{4}{x}+\frac{14}{x^2} \\ \dots \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3-3x^2+4x+1}{x^2+2} = x-3+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

Terme des Typs
mit $n > 3$

$\swarrow \frac{1}{x^n}$

$$\textcircled{3} \quad \sum_{n=0}^N q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^N$$

$$q \left(\sum_{n=0}^N q^n \right) = q + q^2 + \dots + q^N + q^{N+1}$$

Die Terme $q, q^2, \dots, q^N$ fallen weg, wenn man diese Beide Summen voneinander abzieht:

$$(1-q) \left(\sum_{n=0}^N q^n \right) = \sum_{n=0}^N q^n - q \left(\sum_{n=0}^N q^n \right)$$

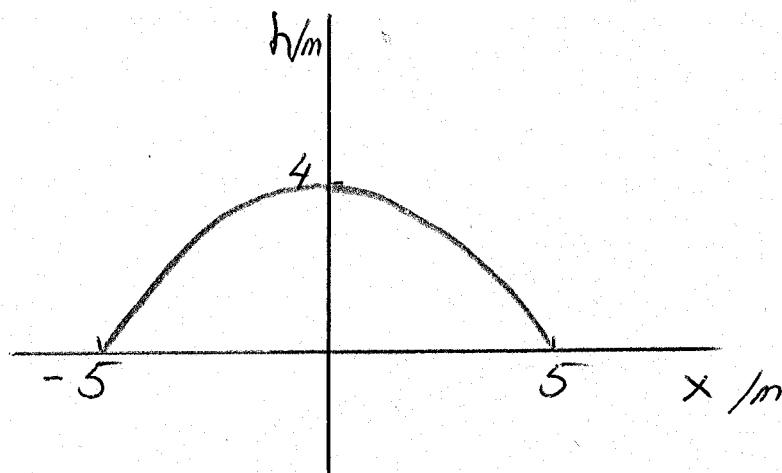
$$\Rightarrow \sum_{n=0}^N q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}$$

Wenn $|q| < 1$ ist es möglich, den Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ zu bilden: $\lim_{N \rightarrow \infty} q^{N+1} = 0$ für $|q| < 1$

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N q^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1$$

4

(x in m)
(h in m)



$h(x)$ ist eine quadratische Funktion mit den Eigenschaften:

$$h(-5) = 0$$

$$h(5) = 0$$

$$h(0) = 4$$

Aus den ersten zwei Eigenschaften folgt, daß

$$h(x) = a(x-5)(x+5)$$

mit a eine Konstante.

$$\text{Dann: } h(0) = -25a = 4 \Rightarrow a = -\frac{4}{25}$$

$$\Rightarrow h(x) = -\frac{4}{25}(x-5)(x+5)$$

$$= -\frac{4}{25}x^2 + 4$$

5a

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha \cos\alpha + \cos\alpha \sin\alpha \\ &= 2 \sin\alpha \cos\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha \pm \beta) &= \sin\left(\frac{1}{2}\pi - (\alpha \pm \beta)\right) \\ &= \sin\left(\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) \mp \beta\right) \\ &= \sin\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) \cos\beta \mp \cos\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) \sin\beta \\ &= \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \sin\alpha \\ &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{aligned}$$

5b

Wir können das 2. Ergebnis von 5a auch so schreiben (mit $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$):

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + 1)$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$$

$$\text{Ersetze nun } \alpha \rightarrow \frac{\alpha}{2} : \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\text{Ebenso: } \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(-\cos 2\alpha + 1)$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

$$\text{Ersetze } \alpha \rightarrow \frac{\alpha}{2} : \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

5c

Aus

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

folgt $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$

$$\Rightarrow \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

Ebenso

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\Rightarrow \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

5d

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha$$

$$= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha$$

$$= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha$$

$$= -4 \sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

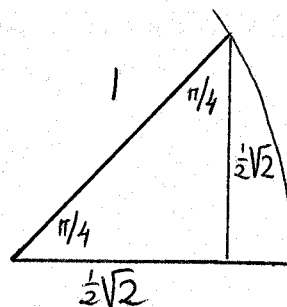
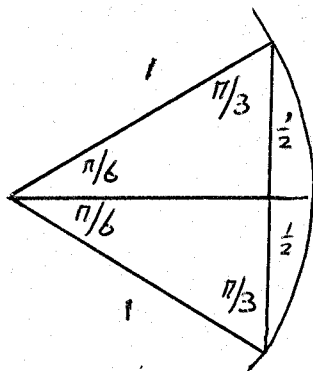
Teile Zähler und Nenner durch $\cos \alpha \cos \beta$:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

(5e)

$$\begin{aligned}\frac{\cos \alpha (1 - \tan^2 \alpha)}{\tan \alpha (\cot \alpha - 1)} &= \frac{\cos \alpha \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}\right)}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - 1\right)} \\&= \frac{\cos \alpha \left(\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}\right)}{1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} \\&= \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} \\&= \frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)}{\cos \alpha - \sin \alpha} \\&= \cos \alpha + \sin \alpha\end{aligned}$$

6a



$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$= \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

6b

Aus $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$ und $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ folgt, daß

$$\sin \frac{\pi}{12} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \pi/6}{2}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3}}$$

Da $0 < \sin \frac{\pi}{12} < 1$ kann nur $+$ möglich sein

$$\Rightarrow \sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3}}$$

ggf. weiter vereinfachen:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{3}) \Rightarrow \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

6c

Mithilfe von $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$
findet man

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\text{Setze } \alpha = \frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow \tan \frac{\pi}{4} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{8}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{8}}$$

$$\text{Setze } \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\Rightarrow 1 - \tan^2 \frac{\pi}{8} = 2 \tan \frac{\pi}{8}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \tan^2 \frac{\pi}{8} + 2 \tan \frac{\pi}{8} - 1$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{\pi}{8} = -1 + \sqrt{2}$$

(Die Lösung $-1 - \sqrt{2}$ trifft nicht zu weil $\tan \frac{\pi}{8} > 0$.)

(6d)*

Wir berechnen zuerst $\sin \frac{\pi}{5}$.

Hierzu benötigen wir eine Relation zwischen $\sin 5\alpha$ und $\sin \alpha$:

$$\begin{aligned}\sin 5\alpha &= \sin(2\alpha + 3\alpha) \\ &= \sin 2\alpha \cos 3\alpha + \cos 2\alpha \sin 3\alpha\end{aligned}$$

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha$$

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\sin 5\alpha &= \sin 2\alpha (\cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha) \\ &\quad + \cos 2\alpha (\sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= 2 \sin \alpha \cos \alpha ((1 - 2 \sin^2 \alpha) \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha) \\ &\quad + (1 - 2 \sin^2 \alpha) (2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= 2 \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) (1 - \sin^2 \alpha) - 4 \sin^3 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) \\ &\quad + 2(1 - 2 \sin^2 \alpha) (1 - \sin^2 \alpha) \sin \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha)^2 \sin \alpha\end{aligned}$$

$$= 16 \sin^5 \alpha - 20 \sin^3 \alpha + 5 \sin \alpha$$

$$= \sin \alpha (16 \sin^4 \alpha - 20 \sin^2 \alpha + 5)$$

Setze nun $\alpha = \frac{\pi}{5}$, $y = \sin \frac{\pi}{5}$:

$$\sin 5\alpha = \sin \pi = 0 = y(16y^4 - 20y^2 + 5)$$

Da $\sin \frac{\pi}{5} > 0$: $y \neq 0 \Rightarrow$

$$16y^4 - 20y^2 + 5 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 320}}{32} = \frac{5}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{5}$$

Wir wissen $0 < \sin^2 \frac{\pi}{5} < \frac{1}{2}$, weil $\sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$,
deshalb kann die Lösung $y^2 = \frac{5}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{5}$
nicht zutreffen

$$\Rightarrow y^2 = \frac{5}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{5}$$

und $\sin^2 \frac{\pi}{5} < \sin^2 \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{5}}$$

$$\cos \frac{\pi}{5} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{5}} = \sqrt{\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tan \frac{\pi}{5} &= \frac{\sin \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{\pi}{5}} = \frac{\sqrt{\frac{5}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{5}}}{\sqrt{\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{5}}} \\ &= \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}} \end{aligned}$$

Dies kann ggf. noch weiter vereinfacht werden:

$$\frac{5 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \frac{(5 - \sqrt{5})(-\sqrt{5} + 3)}{(\sqrt{5} + 3)(-\sqrt{5} + 3)} = \frac{-8\sqrt{5} + 20}{4} = 5 - 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \tan \frac{\pi}{5} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$$

Aufgabe 8

In dieser Aufgabe geht es um Grundlagen der Kombinatorik.

- (a) 1. In einer Urne liegen N unterscheidbare Kugeln. Sie ziehen nacheinander k Kugeln ohne Zurücklegen. Wie viele unterschiedliche Ergebnisse ohne Berücksichtigung der Reihenfolge gibt es?

Zuerst berechnen wir die Zahl der Ergebnisse mit Berücksichtigung der Reihenfolge. Beim 1. Zug gibt es N Möglichkeiten, beim 2. Zug $N - 1$, usw., bis zum k . Zug, wofür es $N - k + 1$ Möglichkeiten gibt. Insgesamt gibt es daher, mit Berücksichtigung der Reihenfolge, $N(N - 1) \cdots (N - k + 1) = N!/(N - k)!$ Möglichkeiten.

Nun werden Ergebnisse, die sich nur durch eine andere Reihenfolge der gezogenen Kugeln unterscheiden, als äquivalent betrachtet. Bei k gezogenen Kugeln gibt es $k!$ mögliche Reihenfolgen. Daraus folgt, dass die Zahl der Ergebnisse ohne Berücksichtigung der Reihenfolge $N!/((N - k)!k!)$ ist.

2. Die Wahrscheinlichkeit, beim Wurf einer Münze als Ergebnis "Kopf" zu erhalten, sei p . Sie werfen die Münze N mal. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dabei insgesamt k mal Kopf zu erhalten? Hilft Ihnen dabei der erste Aufgabenteil?

Wenn man N mal eine Münze wirft, kann es mehrere Möglichkeiten geben, dabei k mal Kopf zu erhalten. Zum Beispiel, wenn man zwei mal eine Münze wirft, gibt es zwei Möglichkeiten genau ein mal Kopf zu erhalten: Entweder bei der ersten Wurf, oder bei der zweiten. Wir berechnen nun zuerst die Zahl der Möglichkeiten, dass bei N Würfen genau k mal Kopf erhalten wird, und dann die Wahrscheinlichkeit, dass so eine Möglichkeit auftritt.

Die Zahl der Möglichkeiten, bei N Würfe genau k mal Kopf zu erhalten ist die gleiche Zahl, die schon in Teil 1 ausgerechnet wurde: $N!/((N - k)!k!)$. Jede Möglichkeit hat die Wahrscheinlichkeit $p^k(1 - p)^{N - k}$, da $N - k$ der Würfe ja Zahl geben müssen, und die Wahrscheinlichkeit, dass man Zahl erhält $1 - p$ ist. Insgesamt finden wir also, dass die Wahrscheinlichkeit $P(k)$ insgesamt k mal Kopf zu erhalten durch

$$P(k) = \frac{N!}{(N - k)!k!} p^k (1 - p)^{N - k}$$

gegeben wird.

3. Sie kennen den Binomialkoeffizienten $\binom{N}{k}$ aus der Vorlesung. Interpretieren Sie anschaulich die beiden Relationen

$$\binom{N}{k} = \binom{N}{N - k}, \quad \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} p^k (1 - p)^{N - k} = 1 \quad \text{für } 0 < p < 1.$$

Nach Teil 1 ist $\binom{N}{k}$ die Zahl der unterschiedlichen Ergebnisse (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge), wenn man k Kugeln aus N unterscheidbaren Kugeln zieht. Dadurch, dass man k Kugeln zieht, legt man auch die $N - k$ übrig gebliebenen Kugeln genau fest. Daher ist die Zahl der unterschiedlichen Ergebnisse für die $N - k$ übrig gebliebenen Kugeln auch $\binom{N}{k}$. Nun hätte man statt zuerst k Kugeln zu ziehen und dann die $N - k$ übrig gebliebenen Kugeln zu nehmen, auch direkt $N - k$ Kugeln ziehen können. Die Zahl der unterschiedlichen Ergebnisse ist dann $\binom{N}{N-k}$. Daher muss gelten, dass

$$\binom{N}{k} = \binom{N}{N-k}.$$

Für die zweite Identität merken wir auf, dass die Summe aller Wahrscheinlichkeiten immer 1 ist. Deshalb

$$1 = \sum_{k=0}^N P(k) = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}.$$

- (b) In einer Urne liegen N Kugeln, k weiße und $N - k$ schwarze. Sie entnehmen $l \leq k$ Kugeln ohne Zurücklegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß darunter genau $m \leq l$ weiße Kugeln sind?

Wären die Kugeln unterscheidbar, dann gäbe es $\binom{N}{l}$ Möglichkeiten, l Kugeln aus N zu ziehen. Es sind aber nur zwei Gruppen unterscheidbar, schwarz und weiss. Es gibt $\binom{k}{m}$ Möglichkeiten, m weiße aus der Gesamtheit der k weißen zu ziehen. Als Resultat erhalten wir automatisch auch $l - m$ schwarze Kugeln. Diese können auf $\binom{N-k}{l-m}$ Weisen aus den $N - k$ schwarzen gezogen werden. Das Ergebnis ist deshalb

$$P = \frac{\binom{k}{m} \binom{N-k}{l-m}}{\binom{N}{l}}.$$

Aufgabe 9*

Berechnen Sie

(a) $\sum_{n=1}^m \frac{1}{n(n+1)},$

Lösung: Mithilfe der Identität

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

schreibt man die Summe als

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n(n+1)} &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

(b) $\sum_{n=1}^m n,$

Lösung: Es gibt viele Möglichkeiten, diese Summe zu berechnen. Hier zeigen wir zwei Möglichkeiten. Der erste Lösungsweg fängt mit dem Ergebnis von Aufgabe 3 an,

$$\sum_{n=1}^m q^n = -1 + \sum_{n=0}^m q^n = -1 + \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}.$$

Nun differenzieren wir nach q und finden

$$\sum_{n=1}^m nq^{n-1} = \frac{1 - q^{m+1}}{(1 - q)^2} - (1 + m) \frac{q^m}{1 - q} = \frac{1 - q^m - mq^m + mq^{1+m}}{(1 - q)^2}.$$

Wenn wir nun $q \rightarrow 1$ setzen, so finden wir die gefragte Summe. Um den Grenzwert $q \rightarrow 1$ auszurechnen brauchen wir die l'Hôpital'sche Regel:

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1 - q^m - mq^m + mq^{1+m}}{(1 - q)^2} &= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{-mq^{m-1} - m^2q^{m-1} + m(m+1)q^m}{-2(1 - q)} \\ &= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{-m(m-1)q^{m-2} - m^2(m-1)q^{m-2} + m^2(m+1)q^{m-1}}{2} \\ &= \frac{1}{2} [-m(m-1) - m^2(m-1) + m^2(m+1)] \\ &= \frac{m^2 + m}{2}. \end{aligned}$$

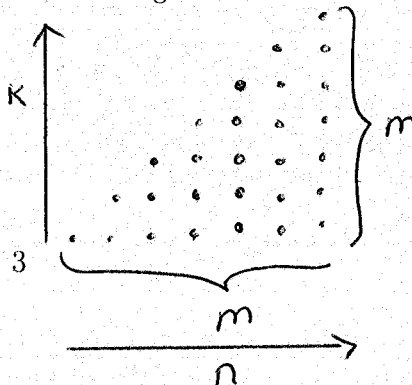
Wir finden deshalb, dass

$$\sum_{n=1}^m n = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Der zweite Lösungsweg schreibt die Summe zuerst als eine doppelte Summe:

$$\sum_{n=1}^m n = \sum_{n=1}^m \sum_{k=1}^n 1.$$

Dies ist eine zweidimensionale Summe, und sie gleicht der Zahl der Gitterpunkte in der Figur. Diese Zahl lässt sich leicht berechnen: Die Zahl der Gitterpunkte unterhalb der Diagonale ist $m(m-1)/2$, und die Zahl der Gitterpunkte auf der Diagonale ist m . Zusammen gibt das dann $m(m+1)/2$ Gitterpunkte.



$$(c) \sum_{n=1}^m n(n-1).$$

Die Lösung ist weitgehend identisch zu (b), nur muss zweimal differentiert werden:

$$\sum_{n=1}^m n(n-1)q^{n-2} = \frac{2 - m(m+1)q^{m-1} + 2(m^2-1)q^m - m(m-1)q^{m+1}}{(1-q)^3}. \quad (1)$$

Grenzwert $q \rightarrow 1$ berechnen mit der l'Hôpitalsche Regel gibt

$$\sum_{n=1}^m n(n-1) = \frac{1}{3}(m-1)m(m+1).$$

Als alternativer Lösungsweg ein Argument aus der Kombinatorik: Man möchte 3 Kugeln aus $m+1$ Kugeln ziehen. Man zählt die Zahl der Möglichkeiten (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) so auf: Die Kugeln werden mit den Zahlen $1, 2, \dots, m+1$ beschriftet. Sei $n+1$ die höchste Zahl der drei ausgewählten Kugeln. Dann gibt es für die anderen beiden Kugeln noch $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten sie aus zu wählen (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge). Die Gesamtzahl Z der Möglichkeiten drei Kugeln aus insgesamt $m+1$ Kugeln zu ziehen, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge, ist daher

$$Z = \sum_{n=1}^m \binom{n}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m n(n-1).$$

In Aufgabe 8a haben wir gesehen, dass

$$Z = \binom{m+1}{3} = \frac{(m+1)m(m-1)}{6}.$$

Daraus folgt, dass

$$\sum_{n=1}^m n(n-1) = \frac{(m+1)m(m-1)}{3}.$$