Aufgabe 1

a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4\left(1-3x^2\right)^3(0-6x) \\ &= -24x(1-3x^2)^3 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\left(x^2-5x+2\right)^{-\frac{1}{2}}(2-5) \\ &= \frac{(2x-5)}{2\sqrt{x^2-5x+2}} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x)x^{-\frac{1}{2}} \\ &= x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^{\frac{1}{2}}(x+1)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}(x+1)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}}(x-1)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sqrt{x}-1\right)^{-1} \\ f'(x) &= -\left(\sqrt{x}-1\right)^{-2}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a)

$$\begin{aligned} f(-x) &= -f(x) \\ f'(x) &= 1-x^{-2} \\ f''(x) &= 2x^{-3} \end{aligned}$$

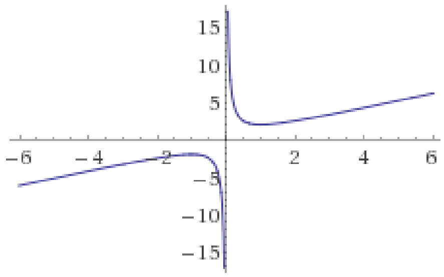

Figure 1: Skizze 2a

Extrema bei $0 = 1 - x^{-2} \Rightarrow x = \pm 1$, $f''(1) = 2 > 0:$ Minimum bei 1. Maximum bei -1 wegen Symmetrie. Außerdem $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 1$.

b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2+1)-(x+2)2x}{(x^2+1)^2} \\ f'(x) &= \frac{(-x^2-4x+1)}{(x^2+1)^2} \\ f''(x) &= \frac{2(x^3+6x^2-3x-2)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

Extrema bei $0 = x^2+4x-1 \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{5}$, $f''(-2+\sqrt{5}) < 0$: Maximum, $f''(-2-\sqrt{5}) > 0$: Minimum. Außerdem $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm 0$.

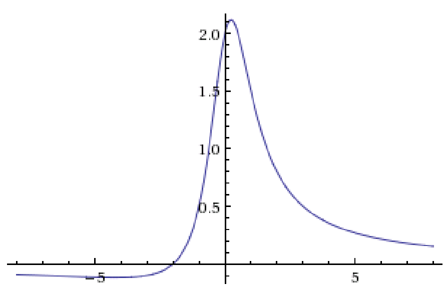

Figure 2: Skizze 2b

c)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} \\ f''(x) &= \frac{2}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Extrema bei $0 = x$, $f''(0) > 0$: Minimum. Außerdem $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = \pm 1$.

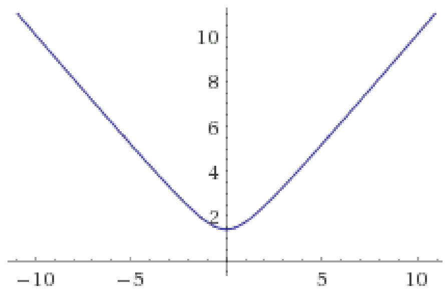

Figure 3: Skizze 2c

Aufgabe 3

a)
$$f'(x) = 2\cos(2x)$$

b)
$$f'(x) = 2x\cos(x^2)$$

c)
$$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

d)
$$f'(x) = -\cos\left[a\cos(bx)\right] ab\sin(bx)$$

e)
$$\begin{aligned} f(x) &= (\sin(x)+1)^{-1} \\ f'(x) &= -(\sin(x)+1)\cos(x) \end{aligned}$$

f)
$$f'(x) = e^{-\sin(x)}\cos(x)$$

Aufgabe 4

a)
$$f(x) = x^2 e^{-x}; \qquad f'(x) = -e^{-x}(x^2 - 2x)$$

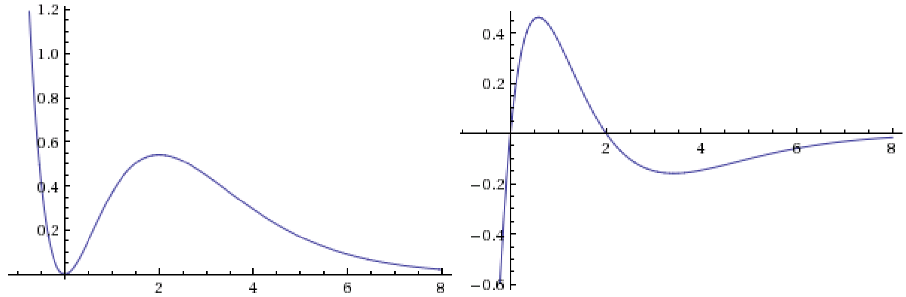

Figure 4: Skizze 4a, $f(x)$ und $f'(x)$

b)

$$f(x) = e^{-ax^2}; \qquad f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

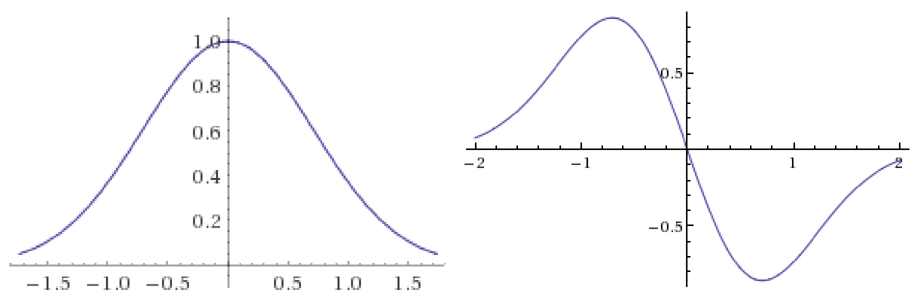

Figure 5: Skizze 4b, $f(x)$ und $f'(x)$ für $a = 1$

c)

$$f(x) = \frac{1}{e^x + 1}; \qquad f'(x) = -\frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$$

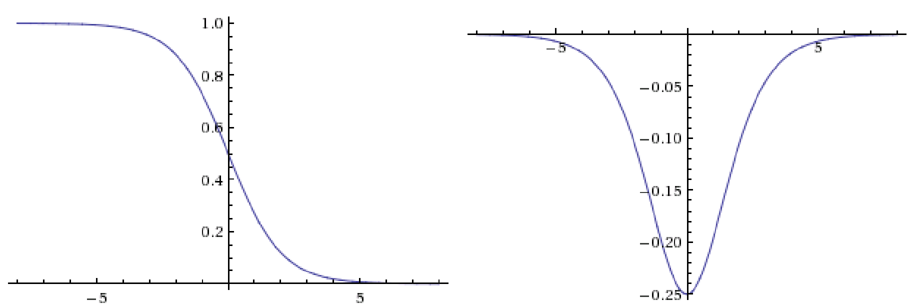

Figure 6: Skizze 4c, $f(x)$ und $f'(x)$

Aufgabe 5

a)

$$f(x) = x \ln x; \qquad f'(x) = \ln x + 1; \qquad f''(x) = \frac{1}{x}$$

Die Funktion hat Nullstellen bei $x = 0$ und $x = 1$ und ein Minimum ($f''(e^{-1}) = e > 0$) bei $x = \frac{1}{e}$, da $f'(e^{-1}) = 0$. Für kleine x geht sie gegen 0, für große x gegen $+\infty$.

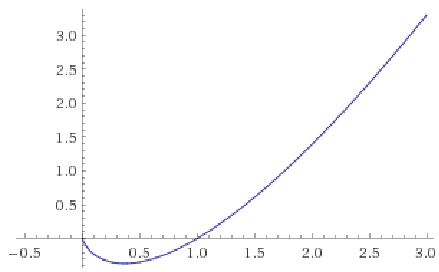

Figure 7: Skizze 5a

b)

$$f(x) = \ln \frac{x}{(x+1)^2}; \qquad f'(x) = \frac{1-x}{x(x+1)}; \qquad f''(x) = \frac{-3x^2+1}{x^2(x+1)^2}$$

Die Funktion hat keine Nullstellen, aber ein Maximum ($f''(1) = -\frac{1}{2}$) bei $x = 1$, da $f'(1) = 0$. Sowohl für kleine, als auch für große x geht die Funktion gegen $-\infty$.

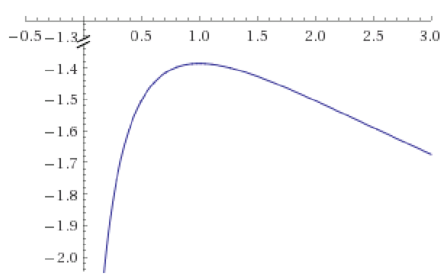

Figure 8: Skizze 5b

Aufgabe 6

$$
\begin{aligned}
(x^n)' &= (e^{n\ln(x)})' \\
&= e^{n\ln(x)} n \frac{1}{x} \\
&= x^n n \frac{1}{x} \\
&= n x^{n-1}
\end{aligned}
$$

Das Umschreiben funktioniert natürlich nicht bei $x = 0$, weil der ln dort nicht existiert. Wie sich leicht überprüfen lässt gilt der Zusammenhang aber auch dort:

$$(0^n)' = 0 = n0^{n-1}.$$

Aufgabe 7

a) Wir nutzen aus, dass $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ Ableitungen voneinander sind. Weiterhin verwenden wir $\sinh^2(x) + 1 = \cosh^2(x)$.

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{arsinh}(x))' &= \frac{1}{\sinh'[\operatorname{arsinh}(x)]} \\
&= \frac{1}{\cosh[\operatorname{arsinh}(x)]} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2[\operatorname{arsinh}(x)]}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{arcosh}(x))' &= \frac{1}{\cosh'[\operatorname{arcosh}(x)]} \\
&= \frac{1}{\sinh[\operatorname{arcosh}(x)]} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\cosh^2[\operatorname{arcosh}(x)]-1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
x &= \tanh\left[\operatorname{artanh}(x)\right] \\
&= \frac{e^{\operatorname{artanh}(x)} - e^{-\operatorname{artanh}(x)}}{e^{\operatorname{artanh}(x)} + e^{-\operatorname{artanh}(x)}} \\
&= \frac{e^{2\operatorname{artanh}(x)} - 1}{e^{2\operatorname{artanh}(x)} + 1} \\
e^{2\operatorname{artanh}(x)} &= \frac{1+x}{1-x} \\
\operatorname{artanh}(x) &= \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x}) \\
(\operatorname{artanh}(x))' &= \frac{1}{2}\frac{1-x}{1+x}\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1}{x^2-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= \coth\left[\operatorname{arcoth}(x)\right] \\
&= \frac{e^{\operatorname{arcoth}(x)} + e^{-\operatorname{arcoth}(x)}}{e^{\operatorname{arcoth}(x)} - e^{-\operatorname{arcoth}(x)}} \\
&= \frac{e^{2\operatorname{arcoth}(x)} + 1}{e^{2\operatorname{arcoth}(x)} - 1} \\
e^{2\operatorname{arcoth}(x)} &= \frac{x-1}{x+1} \\
\operatorname{arcoth}(x) &= \frac{1}{2}\ln(\frac{x-1}{x+1}) \\
(\operatorname{arcoth}(x))' &= \frac{1}{2}\frac{x+1}{x-1}\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} \\
&= \frac{1}{x^2-1}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8

a)

$$\begin{aligned}
x^x &= e^{\ln(x^x)} \\
&= e^{x\ln(x)} \\
(x^x)' &= e^{x\ln(x)}(\ln(x) + x\frac{1}{x}) \\
&= x^x(\ln(x)+1)
\end{aligned}$$

b)

$$(\ln(\ln(\ln(x))))' = \frac{1}{\ln(\ln(x))}\frac{1}{\ln(x)}\frac{1}{x}$$

c)

$$\begin{aligned}
\frac{1-5\cos^2(x)}{1+3\cos^2(x)} &= \frac{\sin^2(x)-4\cos^2(x)}{\sin^2(x)+4\cos^2(x)} \\
\left(\arcsin\left(\frac{1-5\cos^2(x)}{1+3\cos^2(x)}\right)\right)' &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin^2(x)-4\cos^2(x)}{\sin^2(x)+4\cos^2(x)}\right)^2}}\left(\frac{\sin^2(x)-4\cos^2(x)}{\sin^2(x)+4\cos^2(x)}\right)' \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{16\sin^2(x)\cos^2(x)}{(\sin^2(x)+4\cos^2(x))^2}}}\left(\frac{\tan^2(x)-4}{\tan^2(x)+4}\right)' \\
&= \frac{\sin^2(x)+4\cos^2(x)}{4\sin(x)\cos(x)}\frac{16\tan(x)}{\cos^2(x)\left(\tan^2(x)+4\right)^2} \\
&= \frac{4\tan(x)}{\sin(x)\cos(x)\left(\tan^2(x)+4\right)} \\
&= \frac{4}{1+3\cos^2(x)}
\end{aligned}$$