Übungsblatt 5 — Brückenkurs WS 13/14

Aufgabe 1

Berechnen Sie die unbestimmten Integrale (mittels partieller Integration)

(a) $x^2 e^x$,

(b) $x^3 e^{-x^2/a}$,

(c) $e^x \cos x$,

(d) $\dfrac{\ln x}{x}$,

(e) $e^x \sin^2 x$,

(f) $\arcsin x$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die unbestimmten Integrale (mittels Partialbruchzerlegung)

(a) $\dfrac{x^2}{x^2 - a^2}$

(b) $\dfrac{x + 7}{x^2 - 3x + 2}$

(c) $\dfrac{1}{e^x - 1}$

Aufgabe 3

Berechnen Sie die unbestimmten Integrale (mittels Substitution und Partialbruchzerlegung) von

(a) $\dfrac{1}{1 + \sqrt{x}}$,

(b) $\dfrac{1}{\sinh x}$.

Aufgabe 4

Betrachten Sie die unbestimmte Integrale

$$F_n = \int dx \frac{1}{(x^2+1)^n}$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(a) Berechnen Sie F_1.

(b) Beweisen Sie eine Rekursionsformel, mit der F_{n+1} als Funktion von F_n und bekannte Elementarfunktionen geschrieben werden kann. Benutzen Sie Ihr Ergebnis um F_2 und F_3 zu bestimmen.

Aufgabe 5

(a) Berechnen Sie die Fläche der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(b) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch Rotation der Ellipse um die x-Achse erzeugt wird.

(c) Berechnen Sie das Volumen eines Kreiskegels, der Höhe h und Radius r (in der Grundfläche) hat.

Aufgabe 6*

(a) Betrachten Sie die Funktion

$$F(x,t) = \frac{x^t - 1}{\ln x}$$

als Funktion von t. Berechnen die die Ableitung $g(x,t) = F'(x,t)$.

(b) Betrachten Sie nun die Funktion $g(x,t)$ als Funktion der Variable x. Berechnen Sie

$$G(t) = \int_0^1 dx g(x,t).$$

(c) Betrachten Sie nun wieder G als Funktion von t und Berechnen Sie die unbestimmte Integrale

$$H(t) = \int dt G(t).$$

(d) Nun haben Sie die Funktion $F(x,t)$ einmal nach t differenziert, einmal (unbestimmt) wieder nach t integriert, und einmal (bestimmt) nach x integriert. Sollten diese drei mathematischen Operationen vertauschbar sein, dann muss gelten

$$H(t) = \int_0^1 F(x,t) + C,$$

wobei C eine Konstante ist. Bestimmen Sie die Konstante C und geben Sie das Ergebnis folgender Integrale:

$$\int_0^1 dx \frac{x-1}{\ln x}, \quad \int_0^1 dx \frac{x^2-1}{\ln x}.$$

Können Sie diese Integralen auch in einer anderen Weise berechnen?