Brückenkurs

WS 13/14 Blatt 8 (Lösung)

Aufgabe 1

a)

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},\; f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},\; f'''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$$
$$\Rightarrow f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \mathcal{O}(x^4)$$

b)

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}},\; f''(x) = -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}},\; f'''(x) = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}}$$
$$\Rightarrow f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$$

c)

$$f'(x) = \frac{1}{x+1},\; f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2},\; f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$
$$\Rightarrow f(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$$

d)

$$f(x) = 2^x = e^{x\ln(2)} \Rightarrow f'(x) = \ln(2)e^{x\ln(2)},\; f''(x) = \ln^2(2)e^{x\ln(2)},\; f'''(x) = \ln^3(2)e^{x\ln(2)}$$
$$\Rightarrow f(x) = 1 + \ln(2)x + \frac{\ln^2(2)}{2}x^2 + \frac{\ln^3(2)}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^4)$$

Aufgabe 2

a)

$$f'(x) = \cos(x),\; f''(x) = -\sin(x),\; f'''(x) = -\cos(x)$$
$$\Rightarrow f(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^5)$$

b)

$$f'(x) = -\sin(x),\; f''(x) = -\cos(x),\; f'''(x) = \sin(x)$$
$$\Rightarrow f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)$$

c)

$$f'(x) = \cosh(x),\ \ f''(x) = \sinh(x),\ \ f'''(x) = \cosh(x)$$
$$\Rightarrow f(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \mathcal{O}(x^5)$$

d)

$$f'(x) = \sinh(x),\ \ f''(x) = \cosh(x),\ \ f'''(x) = \sinh(x)$$
$$\Rightarrow f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)$$

e)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x)\cos(\sin(x)),\\ f''(x) &= -\sin(x)\cos(\sin(x)) - \cos^2(x)\sin(\sin(x)),\\ f'''(x) &= -\cos(x)\cos(\sin(x)) + 3\sin(x)\cos(x)\sin(\sin(x)) - \cos^3(x)\cos(\sin(x))\\ \Rightarrow f(x) &= x - \frac{1}{3}x^3 + \mathcal{O}(x^5) \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Im Folgenden bedeutet $\left[\frac{0}{0}\right]$, dass es sich um einen Grenzwert handelt, bei dem sowohl der Zähler als auch der Nenner verschwinden und wir folglich die Regel von l'Hospital anwenden können. Die Anwendung dieser Regel wird durch ein "l'H" unter dem Gleichheitszeichen gekennzeichnet.

a)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 + x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2x + 1}{3x^2 - 2x + 1} = \frac{3}{2}$$

b)

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - x^2 - 9x + 9}{3x^3 - 9x^2 + 5x - 15} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 3} \frac{3x^2 - 2x - 9}{9x^2 - 18x + 5} = \frac{3}{8}$$

c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{5}{3 + x} = \frac{5}{3}$$

d)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{1 - x} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1$$

e)

$$\lim_{x\to \pi} \tan\left(\frac{x}{2}\right)\sin(x) = \lim_{x\to \pi} \frac{\sin(x)}{\cot(\frac{x}{2})} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to \pi} \frac{\cos(x)}{-\frac{1}{2\sin^2(\frac{x}{2})}} = 2$$

f)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{\cos(x)} = 2$$

g)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-e^{2x}-3e^{x}+3}{e^{2x}+4e^{x}-5} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3e^{3x}-2e^{2x}-3e^{x}}{2e^{2x}+4e^{x}} = -\frac{1}{3}$$

Aufgabe 4

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{2} = -\frac{1}{2} \tag{1}$$

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{\sinh(x)-x} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{\cosh(x)-1} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{\sinh(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{\cosh(x)} = -1$$

c)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{\arccos(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = -\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = 0$$

d)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{x^4-4x^3+5x^2-4x+4}{2x^4-16x^3+40x^2-32x} &= \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{4x^3-12x^2+10x-4}{8x^3-48x^2+80x-32} \\ &= \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{12x^2-24x+10}{24x^2-96x+80} = -\frac{5}{8}\end{aligned}$$

Aufgabe 5*

a) Offensichtlich ist $\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, da die Exponentialfunktion für sehr große negative Argumente gegen 0 geht. Die ersten drei Ableitungen der Funktion sind gegeben durch,

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}},\; f''(x) = \frac{4-6x^2}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}},\; f'''(x) = \frac{4(6x^4-9x^2+2)}{x^9}e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Betrachten wir die erste Ableitung bei $x = 0$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{4e^{-\frac{1}{x^2}}}{3x^5}.$$

Offenbar ist die naive Anwendung der Regel von l'Hospital hier nicht zielführend, da sich die Potenz im Nenner mit jeder weiteren Anwendung nur erhöht. Mit einem einfachen Trick können wir das aber umgehen: Wir schreiben,

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{2\frac{1}{x^3}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \underset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-6\frac{1}{x^4}}{-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0}\frac{3\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \underset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-3\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0.$$

Ebenso lässt sich für die höheren Ableitungen zeigen, dass $\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$, also dass alle Ableitungen von $f(x)$ bei $x = 0$ verschwinden, da die Exponentialfunktion schneller gegen 0 strebt als eine beliebige Potenz von x im Nenner. Somit verschwindet die Taylorreihe beliebiger Ordnung von $e^{-\frac{1}{x^2}}$ um $x = 0$, die Funktion lässt sich also an diesem Punkt nicht in einer Taylorreihe entwickeln.

b) Da der Limes von $\sin(1/x)$ für $x \to 0$ nicht existiert (der Sinus oszilliert fortwährend zwischen 1 und -1), existiert auch keine Taylorreihe in diesem Punkt.

Aufgabe 6

a)

$$\begin{aligned}
f(x) = x^2 &\Rightarrow f'(x) = 2x \\
&\Rightarrow L = \int_0^1 dx\sqrt{1+[f'(x)]^2} = \int_0^1 dx\sqrt{1+4x^2} \\
\text{Substitution: } z = \operatorname{arsinh}(2x) &\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} \Rightarrow dx = \frac{1}{2}\sqrt{1+4x^2}dz \\
&\Rightarrow L = \frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arsinh}(2)} dz(1+\sinh^2(z))
\end{aligned}$$

Nun kann man den Sinus hyperbolicus entweder als Exponentialfunktion schreiben und direkt integrieren, oder man benutzt $\sinh^2(z) = \frac{1}{2}(\cosh(2z) - 1)$ und erhält,

$$L = \frac{1}{4}\int_0^{\operatorname{arsinh}(4)} dz(\cosh(2z)+1) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\sinh(2z) + z\right]_0^{\operatorname{arsinh}(2)} = \frac{1}{8}(\sinh(2\ \operatorname{arsin}(2)) + 2\ \operatorname{arsinh}(2))$$

Mit der Darstellung des Areasinus $\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ lässt sich dies noch etwas vereinfachen,

$$L = \frac{1}{8}(4\sqrt{5} + \ln(9 + 4\sqrt{5}))$$

b)

$$\begin{aligned}
f(x) = \cosh(x) &\Rightarrow f'(x) = \sinh(x) \\
&\Rightarrow L = \int_0^1 dx\sqrt{1+\sinh^2(x)} = \int_0^1 dx\cosh(x) = \sinh(1)
\end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
&f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&\Rightarrow L = \int_0^1 dx \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} = \int_0^1 dx 1 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} \underset{\text{P.I.}}{=} \left[x\sqrt{1 + \frac{1}{4x}} \right]_0^1 + \frac{1}{8} \int_0^1 dx \frac{1}{x\sqrt{1 - \frac{1}{4x}}} \\
&\quad = \sqrt{\frac{5}{4}} + \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{64x^2 + 16x}} = \sqrt{\frac{5}{4}} + \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{(8x+1)^2 - 1}}
\end{aligned}
$$

Hier bedeutet "P.I." partielle Integration. Genau genommen muss man für den Randterm an der unteren Grenze den Limes bilden, das ist allerdings hier recht einfach. Im letzten Schritt wurde quadratisch ergänzt.

$$
\begin{aligned}
&\text{Substitution: } z = 8x + 1 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 8 \Rightarrow dx = \frac{1}{8} dz \\
&\Rightarrow L = \sqrt{\frac{5}{4}} + \int_1^9 dz \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} = \sqrt{\frac{5}{4}} + \frac{1}{8}(\operatorname{arcosh}(9) - \operatorname{arcosh}(1))
\end{aligned}
$$

Wiederum können wir die Darstellung der Areafunktion als Logarithmus, $\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, nutzen um zu vereinfachen,

$$
L = \frac{1}{8}(4\sqrt{5} + \ln(9 + 4\sqrt{5})).
$$

Dies ist das selbe Ergebnis wie in Aufgabe a), was nicht überrascht, da $\sqrt{x}$ die Umkehrfunktion zu x^2 ist und sich durch die Spiegelung des Graphen an der Winkelhalbierenden die Bogenlänge nicht ändert.

d)*

$$
\begin{aligned}
&f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x) \\
&\Rightarrow L = \int_0^\pi dx \sqrt{1 + \cos^2(x)}
\end{aligned}
$$

Meines Wissens nach ist dieses Integral nicht durch elementare Funktionen darstellbar. Mit der Definition des vollständigen elliptischen Integrals zweiter Art,

$$
E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sqrt{1 - k^2 \sin^2(x)},
$$

können wir die Bogenlänge aber durch dieses ausdrücken. Dazu nutzen wir, dass die Länge des gesamten Bogens gerade die doppelte Länge des Bogens von 0 nach $\pi/2$ ist, sowie die Beziehung $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$,

$$
L = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sqrt{1 + \cos^2(x)} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \sqrt{2 - \sin^2(x)} = 2\sqrt{2} E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \simeq 3.82
$$

Aufgabe 7*

a) Um uns die Formel für die Oberfläche eines Rotationskörpers plausibel zu machen, stellen wir uns den Rotationskörper entlang der x-Achse in infinitesimal dünne Scheiben der Dicke dx unterteilt vor. Jede dieser Scheiben hat den Radius $|f(x)|$ und in x-Richtung eine Ausdehnung, die dem infinitesimalen Bogenstück $\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$ entspricht. Die Mantelfläche einer Scheibe ist damit $2\pi|f(x)|\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$. Die gesamte Oberfläche des Rotationskörpers ergibt sich als Summe (Integral) über alle Scheiben,

$$S = 2\pi \int_a^b dx|f(x)|\sqrt{1+[f'(x)]^2}$$

b) Eine Kugel mit Radius R entsteht durch Rotation des oberen Halbkreises mit Radius R um die x-Achse. Die definierende Gleichung für den Kreisbogen lautet (vgl. Blatt 5, Aufgabe 5 für $a = b = R$)

$$f(x) = R\sqrt{1-\frac{x^2}{R^2}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{R}\frac{x}{\sqrt{1-\frac{x^2}{R^2}}}$$

$$\Rightarrow S = 2\pi \int_{-R}^{R} dx R\sqrt{1-\frac{x^2}{R^2}}\sqrt{1+\frac{1}{R^2}\frac{x^2}{1-\frac{x^2}{R^2}}}$$

$$\text{Substitution: } z = \frac{x}{R} \Rightarrow dx = Rdz$$

$$\Rightarrow S = 2\pi R^2 \int_{-1}^{1} dz\sqrt{1-z^2}\sqrt{1+\frac{z^2}{1-z^2}} = 2\pi R^2 \int_{-1}^{1} dz = 4\pi R^2$$