

Lösungsvorschlag, Übungsblatt 9

Brückenkurs WS 12/13

Aufgabe 1

(a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 6, \quad f'(x) = 6x - 5$

(b) $f(x) = \sqrt{2x+3}, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$

(c) $f(x) = \sin(\ln x), \quad f'(x) = \frac{\cos(\ln x)}{x}$

(d) $f(x) = \cot(2x) = \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}, \quad f'(x) = -2 \frac{\sin^2(2x) + \cos^2(2x)}{\sin^2(2x)} = -\frac{2}{\sin^2(2x)}$

(e) $f(x) = \frac{1}{1 + \tan(x)}, \quad \text{Mit } (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ findet man } f'(x) = -\frac{1}{\cos^2 x} \frac{1}{(1 + \tan(x))^2}$

(f) $f(x) = e^{\sin(3x)}, \quad f'(x) = 3 \cos(3x) e^{\sin(3x)}$

Aufgabe 2

(a) $\int dx \frac{1}{5-2x} = -\frac{1}{2} \ln |5-2x| + c$

(b) $\int dx \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \int dx \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{a}{a} \int dz \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsin(z) + c = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$

mit der Substitution $z = \frac{x}{a}, \quad dx = a dz$

(c) $\int dx (x^5 - 4x^3) = \frac{1}{6}x^6 - x^4 + c$

(d) $\int dx x^3 \ln x \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int dx x^4 \frac{1}{x} = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4} \int dx x^3 = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + c$

(1): Partielle Integration mit $u' = x^3, u = \frac{1}{4}x^4, v = \ln x, v' = \frac{1}{x}$.

(e) $\int dx x e^x \sin x$

Als Vorbereitung: $\int dx e^x \cos x \stackrel{(1)}{=} e^x \cos x + \int dx e^x \sin x = e^x \cos x - e^x \sin x - \int dx e^x \cos x$

(1): Partielle Integration mit $u' = e^x$, $u = e^x$, $v = \cos x$, $v' = -\sin x$.

Es folgt: $\int dx e^x \cos x = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x)$. Zurück zum eigentlichen Integral

$$\begin{aligned} \int dx x e^x \sin x &\stackrel{(2)}{=} e^x x \sin x - \int dx e^x (\sin x + x \cos x) \\ &\stackrel{(3)}{=} e^x x \sin x - e^x (\sin x + x \cos x) + \int dx e^x (2 \cos x - x \sin x) \end{aligned}$$

(2): Partielle Integration mit $u' = e^x$, $u = e^x$, $v = x \sin x$, $v' = \sin x + x \cos x$.

(3): Partielle Integration mit $u' = e^x$, $u = e^x$, $v = \sin x + x \cos x$, $v' = 2 \cos x - x \sin x$.

Durch Umstellen: $2 \int dx x e^x \sin x = e^x x (\sin x - \cos x) - e^x \sin x + 2 \int dx e^x \cos x$

Einsetzen von $\int dx e^x \cos x = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x)$ führt auf

$$\int dx x e^x \sin x = \frac{1}{2}e^x [x(\sin x - \cos x) + \cos x] + c$$

$$(f) \int dx x e^{-x^2} \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2} \int dz e^{-z} = -\frac{1}{2}e^{-z} + c = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

(1) : Substitution $z = x^2$, $dz = 2x dx$.

$$(g) \int dx \sin(3x) \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{3} \int dz \sin z = -\frac{1}{3} \cos(z) + c = -\frac{1}{3} \cos(3x) + c$$

(1) : Substitution $z = 3x$, $dz = 3 dx$.

Aufgabe 3

$$(a) \int_{-1}^1 dx (x^3 - 4x) = 0, \text{ da Integrand ungerade.}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \sqrt{1-x^2} &= \int_0^1 dx 1 \sqrt{1-x^2} \stackrel{(1)}{=} x \sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 dx x \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \\ &= x \sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 + \int_0^1 dx \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= x \sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 + \int_0^1 dx \frac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= x \sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 dx \sqrt{1-x^2} + \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Durch Umstellen:

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \sqrt{1-x^2} &= \frac{1}{2} \left[x\sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 + \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right] = \frac{1}{2} (0 + \arcsin x \Big|_0^1) \\ &= \frac{1}{2} \arcsin(1) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Interpretation: Fläche des Viertelkreises

$$(c) \int_2^4 dx \frac{1}{x} = (\ln |x|) \Big|_2^4 = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2$$

$$(d) \int_{-2}^{-1} dx \frac{1}{x} = (\ln |x|) \Big|_{-2}^{-1} = -\ln 2$$

$$(e) \int_0^{10} dx e^{-5x} = -\frac{1}{5} e^{-5x} \Big|_0^{10} = \frac{1}{5} (1 - e^{-50})$$

(f)

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} dx \sin x \cos(2x) &= \int_0^{\pi/3} dx \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= \int_0^{\pi/3} dx \sin x (2\cos^2 x - 1) \\ &= 2 \int_0^{\pi/3} dx \sin x \cos^2 x - \int_0^{\pi/3} dx \sin x \\ &= -\frac{2}{3} \cos^3 x \Big|_0^{\pi/3} + \cos x \Big|_0^{\pi/3} \tag{1} \\ &= -\frac{2}{3} \cos^3 \left(\frac{\pi}{3} \right) + \frac{2}{3} \cos^3(0) + \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) - \cos(0) \\ &= -\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{12} \tag{2} \end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned} \int_1^3 dx \frac{6+x}{x^2+7x+12} &= \int_1^3 dx \frac{6+x}{(3+x)(4+x)} = \int_1^3 dx \left(\frac{3}{3+x} - \frac{2}{2+x} \right) \\ &= 3 \ln(3+x) \Big|_1^3 - 2 \ln(4+x) \Big|_1^3 = 3 \ln \left(\frac{3}{2} \right) - 2 \ln \left(\frac{7}{5} \right) \\ &= \ln \left(\frac{675}{392} \right) \approx 0.54 \end{aligned}$$

$$(h) \int_0^{1/2} dx \frac{1}{1+4x^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2} \arctan(x) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}$$

Aufgabe 4

(a) Das Gleichungssystem lässt sich schreiben als $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

Gaußsches Eliminationsverfahren: Startpunkt ist

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 1 \\ x + 2y &= 8 \end{aligned} \tag{3}$$

Multipliziere die erste Gleichung mit $-1/4$ und addiere zur zweiten Gleichung

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 1 \\ 0 + \frac{5}{2}y &= \frac{31}{4} \end{aligned} \tag{4}$$

Wir lösen nach y auf: $y = 31/10$. Die erste Gleichung transformiert sich zu $4x - 31/5 = 1$, woraus sich $x = 9/5$ ergibt.

(b) Das Gleichungssystem lässt sich schreiben als $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gaußsches Eliminationsverfahren: Startpunkt ist

$$x + 2y + 3z = 2 \tag{5}$$

$$3x + 2y + z = 0 \tag{6}$$

$$-x + y + z = 1 \tag{7}$$

Erster Schritt: Wir addieren die erste Zeile zur letzten Zeile und das (-3) fache der ersten Zeile zur zweiten Zeile

$$x + 2y + 3z = 2 \tag{8}$$

$$0 - 4y - 8z = -6 \tag{9}$$

$$0 + 3y + 4z = 3 \tag{10}$$

Zweiter Schritt: Wir addieren das $(3/4)$ fache der zweiten Zeile zur dritten Zeile

$$x + 2y + 3z = 2 \tag{11}$$

$$0 - 4y - 8z = -6 \tag{12}$$

$$0 + 0 - 2z = -\frac{3}{2} \tag{13}$$

Dritter Schritt: Wir lösen auf: $z = 3/4$, $y = 0$, $x = -1/4$

Aufgabe 5 Gegeben ist die Gerade $y = 3x + 2$.

(a) Parameterdarstellung: $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} x$

(b) Sie Normale \mathbf{n} steht senkrecht auf $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, also $\mathbf{nb} = 0$ oder $n_x + 3n_y = 0$, aufgelöst

$\mathbf{n} = n_x \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \end{pmatrix}$. Außerdem normieren wir $\mathbf{n}^2 = 1$, somit gilt $n_x^2 + n_y^2 = 1 = n_x^2(1 + 1/3^2) = \frac{10}{9}n_x^2$. Wir folgern $n_x = \pm \frac{3}{\sqrt{10}}$ und wählen (willkürlich) $n_x = \frac{3}{\sqrt{10}}$ aus. Die Normalenform der Gleichung lautet $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0$ für einen beliebigen Punkt \mathbf{r}_0 auf der Geraden, zum Beispiel $\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Zusammengefasst:

$$\frac{3}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0 \quad (14)$$

(c) Die Gerade schneidet die x -Achse bei $x = -2/3$ und die y -Achse bei $y = 2$. Somit gilt $\tan \alpha = 2/(2/3) = 3$, $\alpha = \arctan(3) \approx 71^\circ$.

(d) Der minimale Abstand ist $x_{min} = 2 \cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{5}}$.

Aufgabe 6

(a) $X(n+1) = X(n) + (pX(n) - Y) = (1+p)X(n) - Y$. Für die Beispiele fixieren wir $p = 0.05$ und $X(0) = 1000$.

- $Y = 100$, dann gilt $X(n+1) = 1.05X(n) - 100$
- $Y = 50$, dann gilt $X(n+1) = 1.05X(n) - 50$
- $Y = 10$, dann gilt $X(n+1) = 1.05X(n) - 10$

Man kann diese Gleichungen numerisch iterieren, siehe Fig. 1.

(b) Die modifizierte Gleichung lautet

$$X(n+1) = \left(1 + \frac{p}{m}\right) X(n) - \frac{Y}{m} = X(n) + \frac{p}{m} X(n) - \frac{Y}{m} \quad (15)$$

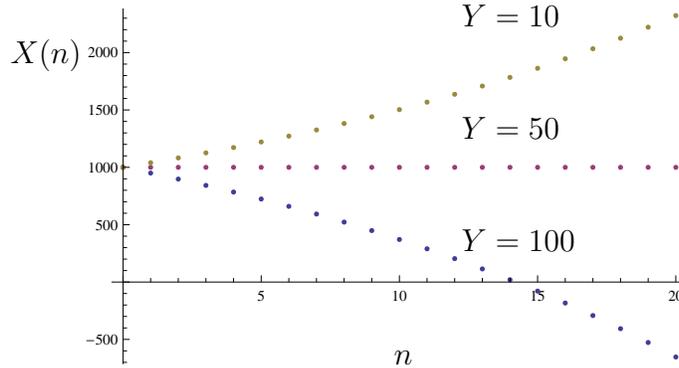


Figure 1: Iteration der Gleichung $X(n+1) = 1.05X(n) - Y$ mit $X(0) = 1000$. Für $Y = 100$ wären die Schulden nach etwa 14 Jahren abbezahlt. Für $Y = 50$ bleibt der Schuldenstand unverändert, da der Betrag Y gerade die jährlichen Zinsen abdeckt. Für $Y = 10$ wachsen die Schulden weiter an.

Wir fassen zunächst $\Delta t = 1/m$ als kleines Zeitintervall auf und $\Delta X = X(n+1) - X(n)$ als zugehörige Veränderung der Größe $X(t)$, wobei t eine kontinuierliche Zeitvariable ist. So erhalten wir die Differenzgleichung

$$\Delta X = (pX - Y)\Delta t, \quad \frac{\Delta X}{\Delta t} = (pX - Y) \quad (16)$$

Im Grenzfall $m \rightarrow \infty$ ($\Delta t \rightarrow 0$) ergibt sich die Differentialgleichung

$$X'(t) = pX(t) - Y \quad (17)$$

Die homogene Gleichung $X'(t) = pX(t)$ wird durch $X(t) = A \exp(pt)$ gelöst. Durch Variation der Konstanten $A \rightarrow A(t)$ erhält man aus der inhomogenen Gleichung $A(t) = A(0) + \frac{Y}{p}(\exp(-pt) - 1)$ und damit

$$X(t) = \frac{Y}{p} + \left(X(0) - \frac{Y}{p} \right) \exp(pt) \quad (18)$$

wobei $A(0)$ mit $X(0)$ identifiziert wurde. In Fig. 2 vergleichen wir die Lösung der Differentialgleichung mit der numerischen Lösung der ursprünglichen Gleichung.

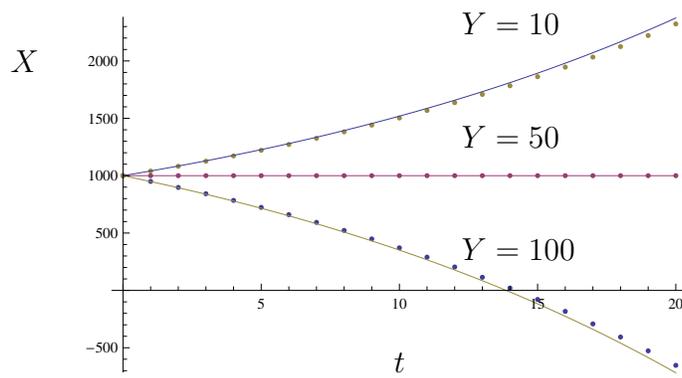


Figure 2: Iteration der Gleichung $X(n+1) = 1.05X(n) - Y$ mit $X(0) = 1000$, sowie die Lösung der Differentialgleichung $X'(t) = 0.05X(t) - Y$.