1 Mathematik und Korrespondenzprinzip

Aufgabe 1.1: Gausssche Integrale

(a) Berechnen Sie
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2+bx}.$$
Für welche a und b ist dieses Integral definiert?

(b) Berechnen Sie
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x e^{-ax^2+bx}.$$

(c) Berechnen Sie
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-ax^2+bx}.$$

Aufgabe 1.2: Fourier Transformierte

Seien k und a reelle Zahlen.

(a) Berechnen Sie
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} \frac{1}{a^2+x^2}.$$

(b) Berechnen Sie
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} \frac{x}{a^2+x^2}.$$

(c) Berechnen Sie
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} \delta(x).$$

Aufgabe 1.3: Korrespondenzprinzip

Im Rutherfordschen Atommodell bewegen sich die Elektronen als klassische Teilchen mit Ladung $-e$ um den positiv geladenen Atomkern. Da es sich hier um ein klassisches Atommodell handelt, ist die Elektronenenergie E im Rutherfordschen Modell kontinuierlich. In Kombination mit der Photonenhypothese kann man aber aus dem Rutherfordschen Modell einen beträchtlichen Teil der quantenmechanischen Relation

$$E_n = -\frac{\mathrm{Ry}}{n^2}, \quad \mathrm{Ry} = \frac{me^4}{2\hbar^2}$$

für die Energieniveaus des Wasserstoffatoms herleiten.

(a) In der klassischen Mechanik genügen die Energie E und die Frequenz $\nu_{\mathrm{Bahn}} = \omega_{\mathrm{Bahn}}/2\pi$ der elliptischen Bahnen eines Teilches mit Masse m in dem zentralen Potential $-e^2/r$ der Gleichung

$$\nu_{\mathrm{Bahn}} = \frac{1}{\pi e^2}\sqrt{\frac{2|E|^3}{m}},$$

unabhängig von der Exzentrizität der Ellipse. Laut klassischer Elektrodynamik strahlt ein beschleunigtes geladenes Teilchen Energie ab. Was sind die möglichen Frequenzen $\nu_{\mathrm{klassisch}}$ für die Strahlung eines Wasserstoffatoms mit Energie E im Rutherfordschen Atommodell?

Hinweis: Welche Frequenzen treten auf in der Fourier-Reihe einer periodischen Funktion der Periode $T = 1/\nu$?

(b) In der Quantenmechanik gibt es Strahlung nur bei gewissen quantisierten Frequenzen, die als Differenz der quantisierten Energieniveaus E_n gefunden werden. Hier ist n eine "Quantenzahl". Für grosse n liegen die Energie-Niveaus dicht beieinander. Zeigen Sie, dass für Übergänge zwischen nahe beieinander liegenden Energieniveaus mit großer Quantenzahl n die Strahlung eine Frequenz ν_{quantum} hat, eine ganzzahliges Vielfaches von

$$\nu_{\mathrm{quantum,\ 0}} = \frac{1}{2\pi\hbar}\frac{dE_n}{dn}$$

ist.

(c) Laut Korrespondenzprinzip geht die Quantenmechanik bei grossen Quantenzahlen in die klassische Mechanik über. Vergleichen Sie Ihre Antworten zu (a) und (b) und bestimmen Sie daraus die mögliche Form der Abhängigkeit der quantisierten Energie-Niveaus E_n von n.