2 Vektorräume

Aufgabe 2.1: Kommutatoren

Betrachten Sie den Hilbertraum der quadratintegrablen Funktionen in einer Dimension mit den linearen Operatoren $\hat{k} = -id/dx$ und $\hat{x}$. Berechnen Sie den Kommutator

$$[\hat{k}^2, \hat{x}] = \hat{k}^2\hat{x} - \hat{x}\hat{k}^2.$$

Aufgabe 2.2: Lineare Operatoren und Matrizen

Sei $\{|n\rangle\}$ eine orthonormale Basis für den Vektorraum V, und sei $\hat{A}$ ein linearer Operator auf V.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\hat{A} = \sum_{n,m} |n\rangle A_{nm} \langle m|, \tag{1}$$

mit

$$A_{nm} = \langle n|\hat{A}|m\rangle.$$

Die Zahl A_{nm} wird "Matrixelement des Operators $\hat{A}$ in der Basis $\{|n\rangle\}$" genannt.

(b) Wie sieht die Gleichung (1) im Falle einer Delta-Funktion-normierten Basis $\{|\lambda\rangle\}$ aus?

Betrachten Sie nun den Hilbertraum der quadratintegrablen Funktionen $F(x)$ in einer Dimension $\mathcal{H}$ mit dem linearen Operator $\hat{k} = -id/dx$.

(c) Berechnen Sie die Matrixelemente $\langle x'|\hat{k}|x\rangle$ des Operators $\hat{k}$ in der Ortsbasis $\{|x\rangle\}$.

(d) Berechnen Sie die Matrixelemente $\langle k'|\hat{k}|k\rangle$ des Operators $\hat{k}$ in der Fourierbasis $\{|k\rangle\}$. (Der Ket $|k\rangle$ wird von der Funktion $\psi_k(x) = \langle x|k\rangle = (2\pi)^{-1/2}e^{ikx}$ dargestellt.)

Aufgabe 2.3: Skalar-Produkt in Fourierdarstellung

Die Funktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ seien quadratintegrabel. Beweisen Sie, dass

$$\int dx F_1(x)^* F_2(x) = \int dk G_1(k)^* G_2(k),$$

wobei $G_j(k)$ die Fourier-Transformierte von $F_j(x)$ ist,

$$G_j(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx F_j(x) e^{-ikx}, \quad j = 1, 2.$$