

4 Quantenmechanik in einer Dimension

Aufgabe 4.1: Zustandsdichte

- (a) Die Energie-Eigenwerte für ein “eindimensionales” Teilchen mit $0 < x < L$ und mit periodische Randbedingungen sind

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi n}{L} \right)^2, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Die “Zustandsdichte” $\Omega(E)dE$ ist definiert als die Zahl der Energie-Eigenwerte E_n in dem Intervall $[E, E + dE]$. Für grosse L ist die Zustandsdichte $\Omega(E)$ proportional zu L . Berechnen Sie $\Omega(E)/L$ im Limes $L \rightarrow \infty$.

- (b) Die Energie-Eigenwerte für ein “eindimensionales” Teilchen in einem Kasten $0 < x < L$ mit Randbedingungen $\psi(0) = \psi(L) = 0$ sind

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Berechnen Sie $\Omega(E)/L$ im Limes $L \rightarrow \infty$ für dieses Teilchen.

Aufgabe 4.2: Periodische Randbedingungen

Das Spektrum des Impulsoperators $\hat{p}$ wird diskret wenn man fordert, dass das System periodisch ist: Bei einer Verschiebung um L bleibt die Wellenfunktion $\psi(x)$ unverändert, $\psi(x) = \psi(x+L)$. Solche Randbedingungen werden “periodische Randbedingungen” genannt. Für periodische Randbedingungen ist das Skalarprodukt definiert als

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int_0^L dx \psi_1(x)^* \psi_2(x).$$

- (a) Finden Sie die normierten $\hat{p}$ -Eigenfunktionen $\psi_p(x)$. Was sind die $\hat{p}$ -Eigenwerte und was ist ihre Entartung?
- (b) Zeigen Sie, dass die Impuls-Eigenfunktionen $\psi_p(x)$ orthonormal sind,

$$\langle p | p' \rangle = \int dx \psi_p(x)^* \psi_{p'}(x) = \delta_{pp'}.$$

- (c) Die Impuls-Eigenfunktionen $\psi_p(x)$ bilden eine Basis für den Hilbertraum der L -periodischen Funktionen: Eine willkürliche L -periodische Funktion $\psi(x)$ kann nach den Impuls-Eigenfunktionen $\psi_p(x)$ entwickelt werden,

$$\psi(x) = \sum_p \phi_p \psi_p(x).$$

Berechnen Sie die Expansionskoeffizienten ϕ_p .

- (d) Zeigen Sie, dass die Normierung (b) und die Vollständigkeitsrelation (c) für die Impuls-Eigenfunktionen mit periodischen Randbedingungen in die bekannte Normierung und Vollständigkeitsrelation für Impuls-Eigenfunktionen ohne periodischen Randbedingungen (d.h., mit $-\infty < x < \infty$) übergehen in dem Limes $L \rightarrow \infty$, mit den Relationen

$$\frac{1}{L} \sum_p \rightarrow \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp, \quad L\delta_{p,p'} \rightarrow (2\pi\hbar)\delta(p-p'), \quad L^{1/2}\psi_p(x) \rightarrow (2\pi\hbar)^{1/2}\psi_p(x).$$