5 Harmonischer Oszillator

Aufgabe 5.1: Matrixelemente

Betrachten Sie ein Teilchen mit Masse m in einem harmonischen Potential $V(x) = m\omega^2 x^2/2$. Berechnen Sie folgende Matrixelemente zwischen den Energie-Eigenzuständen $|n\rangle$ und $|n'\rangle$:

(a) $\langle n'|\hat{x}|n\rangle$ und $\langle n'|\hat{p}|n\rangle$,

(b) $\langle n'|\hat{x}^2|n\rangle$ und $\langle n'|\hat{p}^2|n\rangle$.

Berechnen Sie folgende Erwartungswerte und Streuungen für den Fall, dass das Teilchen im Energie-Eigenzustand $|n\rangle$ ist:

(c) $\langle x\rangle$ und $\langle p\rangle$,

(d) Δx und Δp.

Aufgabe 5.2: Harmonischer Oszillator-Eigenzustände: Basis

Laut allgemeiner Theorie bilden die Energie-Eigenzustände eines harmonischen Oszillators eine orthonormale Basis für den Hilbertraum $\mathcal{H}$.

(a) Beweisen Sie, dass die Energie-Eigenzustände $|n\rangle$ orthonormal sind, d.h., dass

$$\langle n'|n\rangle = \delta_{n'n}.$$

Hinweis: In der Vorlesung wurden die Energie-Eigenzustände $|n\rangle$ als

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle$$

konstruiert, wobei $|0\rangle$ der Grundzustand ist. Es wurde bewiesen, dass die Energie-Eigenzustände $|n\rangle$ normiert sind, $\langle n|n\rangle = 1$, und dass sie den Gleichungen

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

genügen.

(b) Beweisen Sie, dass die Energie-Eigenzustände $|n\rangle$ vollständig sind, d.h., dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \hat{1}.$$

Hinweis: In der Ortsdarstellung werden die Energie-Eigenzustände durch die Zustandsfunktionen

$$\tilde{\psi}_n(x) = \pi^{-1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\tilde{x}) e^{-\tilde{x}^2/2}, \quad H_n(\tilde{x}) = e^{\tilde{x}^2/2} \left(\tilde{x} - \frac{d}{d\tilde{x}} \right)^n e^{-\tilde{x}^2/2}$$

dargestellt. Mit Hilfe der Operatorenidentität

$$\tilde{x} - \frac{d}{d\tilde{x}} = -e^{\tilde{x}^2/2} \frac{d}{d\tilde{x}} e^{-\tilde{x}^2/2}$$

schreibt man die Hermite Polynome als

$$H_n(\tilde{x}) \quad = \quad (-1)^n e^{\tilde{x}^2} \frac{d^n}{d\tilde{x}^n} e^{-\tilde{x}^2}.$$

Schliesslich stellt man $e^{-\tilde{x}^2}$ als Fourier Integral dar und beweist, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\psi}_n^*(\tilde{x}') \tilde{\psi}_n(\tilde{x}) = \delta(\tilde{x} - \tilde{x}').$$