9 Spin und Feinstruktur

Aufgabe 9.1: Wellenfunktion eines Teilchen mit Spin 1/2

Die Spinor-Wellenfunktion eines Teilchen mit Spin 1/2 sei gegeben durch

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} a_{\uparrow}(\boldsymbol{r}) \\ a_{\downarrow}(\boldsymbol{r}) \end{pmatrix}.$$

Welche Bedingungen müssen $a_{\uparrow}(\boldsymbol{r})$ und $a_{\downarrow}(\boldsymbol{r})$ erfüllen, damit

(a) ψ eine normierte $\hat{s}_z$-Eigenfunktion ist zum Eigenwert $\hbar/2$;

(b) ψ eine normierte $\hat{s}_x$-Eigenfunktion ist zum Eigenwert $-\hbar/2$.

Aufgabe 9.2: Spinor Notation

(a) In der Spinor Notation für Spin-1/2-Teilchen werden Operatoren durch 2×2 Matrizen dargestellt. Zum Beispiel, die Operator $\hat{s}_z$ und $\hat{l}_z$ werden durch die Matrix-Operatoren

$$\hat{s}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}, \quad \hat{l}_z = \hat{l}_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt. Durch welchen Matrix-Operator wird der Operator $\hat{\boldsymbol{l}} \cdot \hat{\boldsymbol{s}}$ dargestellt?

(b) Ist die Spinor-Wellenfunktion

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} R(r) \begin{pmatrix} Y_{l,l}(\theta, \phi) \\ Y_{l,-l}(\theta, \phi) \end{pmatrix},$$

wobei $\int_0^\infty dr r^2 |R(r)|^2 = 1$, eine Eigenfunktion des Operators $\hat{\boldsymbol{l}} \cdot \hat{\boldsymbol{s}}$?

Aufgabe 9.3: Relativistische Korrekturen

Aus der relativistischen Dirac Theorie für das Elektron gehen drei Korrekturen zum Hamilton-Operator des Wasserstoffatoms hervor. Diese sind die relativistische Korrektur zur kinetischen Energie H_{rel}, die Spin-Bahn Kopplung H_{so} und der "Darwin-Term" H_{D},

$$
\begin{aligned}
\hat{H}_{\text{rel}} &= -\frac{1}{8}\frac{(\hat{\boldsymbol{p}}^2)^2}{m^3c^2}, \\
\hat{H}_{\text{so}} &= \frac{1}{2m^2c^2}\hat{\boldsymbol{s}}\cdot\hat{\boldsymbol{l}}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}V(r)\right), \\
\hat{H}_{\text{D}} &= \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\boldsymbol{\nabla}^2V(r).
\end{aligned}
$$

(a) Begründen Sie, dass H_{rel} die erste relatistische Korrektur zur kinetischen Energie ist.

(b) Die gebundenen Eigenzustände des Wasserstoffatoms ohne die relativistischen Korrekturen werden als $|nlmm_s\rangle$ dargestellt, wobei n, l, m und m_s die Hauptquantenzahl, Nebenquantenzahl, magnetische Quantenzahl und Spinquantenzahl sind. Zeigen Sie, dass H_{rel} keine Matrixelemente zwischen Zuständen $|nlmm_s\rangle$ mit unterschiedlichen l, m und m_s hat und berechnen Sie die 'diagonalen' Matrixelemente

$$\langle nlmm_s|H_{\text{rel}}|nlmm_s\rangle.$$

1. Hinweis: Benützen Sie die Identität $\hat{H}_{\text{rel}} = (-1/2mc^2)(\hat{H}_0 - e^2/r)^2$, *wobei* $\hat{H}_0 = \hat{\boldsymbol{p}}^2/2m + e^2/r$ *der Hamilton-Operator des Wasserstoffatoms ohne die relativistischen Korrekturen ist.*
2. Hinweis: Benützen Sie die Mittelwerte

$$\langle nlmm_s|r^{-1}|nlmm_s\rangle = \frac{Z}{a_0n^2}, \quad \langle nlmm_s|r^{-2}|nlmm_s\rangle = \frac{Z^2}{a_0^2n^3(l+1/2)}.$$

(c) Zeigen Sie, dass

$$\hat{H}_{\text{D}} = \frac{\pi\hbar^2Ze^2}{2m^2c^2}\delta(\boldsymbol{r}).$$

(d) Zeigen Sie, dass H_{D} keine Matrixelemente zwischen Zuständen $|nlmm_s\rangle$ mit unterschiedlichen l, m und m_s hat und berechnen Sie die 'diagonalen' Matrixelemente

$$\langle nlmm_s|H_{\text{D}}|nlmm_s\rangle.$$

Hinweis: Die explizite Darstellung der zugeordneten Laguerre Polynome $L_{n+l}^{2l+1}(x)$ *lautet*

$$L_{n+l}^{2l+1}(x) = \sum_{k=0}^{n-l-1}(-1)^{k+1}\frac{((n+l)!)^2}{k!(k+2l+1)!(n-l-1-k)!}x^k.$$