1 Physikalischer Hintergrund und Dirac δ Funktion

Übungen, die nach Richtigkeit korrigiert werden:

Aufgabe 1.1: Delta-Funktion

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(\pi - x) \cos^2 x$,

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\delta(x)}{1+(x-y)^2}$,

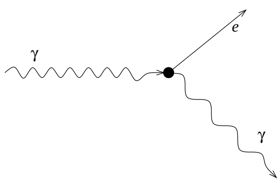
(c) $\int_{-\infty}^{\infty} dx F(x) G(y) \delta(x - y)$,

Übungen, die nach Aufwand korrigiert werden:

Aufgabe 1.2: Compton-Effekt

Der Compton-Effekt ist die Beobachtung, dass bei Streuung von Röntgenstrahlung mit Wellenlänge λ_{ein} und Richtung $\boldsymbol{e}_{\text{ein}}$, die gestreute Strahlung in Richtung $\boldsymbol{e}_{\text{aus}}$ eine Komponente hat mit Wellenlänge λ_{aus} die grösser ist als λ_{ein}.

Der Compton-Effekt wird dadurch erklärt, dass die Röntgenstrahlung aus Photonen mit Energie $2\pi\hbar c/\lambda_{\text{ein}}$ und Impuls $2\pi\hbar \boldsymbol{e}_{\text{ein}}/\lambda_{\text{ein}}$ besteht, die mit einem Elektron in Ruhe (Energie mc^2, Impuls 0) zusammenstossen . Nach dem Zusammenstoss gibt es ein Photon mit Energie $2\pi\hbar c/\lambda_{\text{aus}}$ und Impuls $2\pi\hbar \boldsymbol{e}_{\text{aus}}/\lambda_{\text{aus}}$ und ein Elektron mit Energie $\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$ und Impuls $\boldsymbol{p}$.



Bei dem Stoss sind sowohl die gesamte Energie als auch der gesamte Impuls erhalten. Zeigen Sie, dass daraus folgt, dass

$$\Delta\lambda = \lambda_{\text{aus}} - \lambda_{\text{ein}} = 4\pi \frac{\hbar}{mc} \sin^2(\theta/2),$$

wobei $\cos\theta = \boldsymbol{e}_{\text{ein}} \cdot \boldsymbol{e}_{\text{aus}}$.

Aufgabe 1.3: Darstellung der Delta Funktion

(a) Berechnen Sie das Integral

$$\frac{\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f(x)}{(x-a)^2+\lambda^2}$$

im Limes $\lambda \downarrow 0$, wobei $f(x)$ eine kontinuerliche und integrable Funktion ist.

(b) Argumentieren Sie, dass

$$\frac{1}{\pi}\lim_{\lambda\downarrow 0} \mathrm{Im}\, \frac{1}{x-a-i\lambda}$$

eine Darstellung der Dirac Delta Funktion $\delta(x-a)$ ist.