10 Feinstruktur und zeitabhängige Störungstheorie

Übungen, die nach Richtigkeit korrigiert werden:

Aufgabe 10.1: Clebsch-Gordan Koeffizienten für $l = 1$ und $s = 1/2$

Betrachten Sie einen Rotator mit Spin $s = 1/2$ und Bahndrehimpuls $l = 1$. Der Hilbertraum $\mathcal{H}$ für dieses Teilchen ist sechsdimensional und wird durch die gemeinsamen Eigenzustände $|l, m, s, m_s\rangle$ von $\hat{l}^2$, $\hat{l}_z$, $\hat{s}^2$ und $\hat{s}_z$ aufgespannt, wobei $l = 1$, $m = -1, 0, 1$, $s = 1/2$ und $m_s = -1/2, 1/2$. Ziel dieser Aufgabe ist es, mithilfe dieser sechs Basiszustände gemeinsame Eigenzustände der Operatoren $\hat{\mathbf{j}}^2 = \hat{\mathbf{l}}^2 + \hat{\mathbf{s}}^2$ und $\hat{j}_z$ zu konstruieren, wobei $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$ der gesamte Drehimpuls ist.

- (a) Ein beliebiger Zustand $|\psi\rangle$ des Rotators ist eine Linearkombination der sechs Basiszustände,

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-1}^1 \sum_{m_s=-1/2}^{1/2} a_{m,m_s} |l, m, s, m_s\rangle,$$

wobei die a_{m,m_s} komplexe Zahlen sind, $m = -1, 0, 1$, $m_s = -1/2, 1/2$, und mit $l = 1$, $s = 1/2$. Ein solcher Zustand kann durch den Spaltenvektor

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a_{-1,-1/2} \\ a_{-1,1/2} \\ a_{0,-1/2} \\ a_{0,1/2} \\ a_{1,-1/2} \\ a_{1,1/2} \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. In dieser Notation werden Operatoren durch 6×6 Matrizen dargestellt. Was ist die Matrixdarstellung des Operators $\hat{j}_z$? Was sind die Eigenwerte und was ist ihre Entartung? Was sind die Eigenvektoren?

- (b) Zeigen Sie, dass $\hat{\mathbf{j}}^2 = \hat{\mathbf{l}}^2 + \hat{\mathbf{s}}^2 + \hat{l}_+ \hat{s}_- + \hat{l}_- \hat{s}_+ + 2\hat{l}_z \hat{s}_z$.
- (c) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung des Operators $\hat{\mathbf{j}}^2$.
- (d) Da die Operatoren $\hat{\mathbf{j}}^2$ und $\hat{j}_z$ vertauschbar sind, gibt es eine Basis gemeinsamer Eigenvektoren $|j, m_j, l, s\rangle$ (wobei $s = 1/2$). Bestimmen Sie diese Basisvektoren.

Bemerkung: Die Skalarprodukte $\langle l, m, s, m_s | j, m_j, l, s \rangle$, die die Entwicklung der Eigenvektoren $|j, m_j, l, s\rangle$ in der Basis der Produktzustände $|l, m, s, m_s\rangle$ festlegen, werden ‘‘Clebsch-Gordan Koeffizienten’’ genannt.

Übungen, die nach Aufwand korrigiert werden:

Aufgabe 10.2: Normaler und anomaler Zeeman-Effekt

Die Energieniveaus des Wasserstoffatoms werden durch ein Magnetfeld aufgespaltet. Wie die Aufspaltung sich gestaltet hängt von der relativen Grösse der magnetischen (Zeeman) Energie und der Feinstruktur-Aufspaltung ab.

Für den ‘‘normalen Zeeman-Effekt’’ (oder ‘‘Paschen-Back-Effekt’’) ist die magnetische Energie grösser als die Feinstruktur-Aufspaltung. Für diesen Effekt wird zuerst die magnetische Energie berücksichtigt. Eventuelle relativistische Korrekturen werden nachträglich in Störungstheorie behandelt.

- (a) Der Hamilton-Operator des Wasserstoffatoms in einem homogenen Magnetfeld in z -Richtung ist

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \frac{e^2}{r} - \frac{\mu_B}{\hbar} B_z (\hat{l}_z + g\hat{s}_z),$$

mit $g = 2$. Zeigen Sie, dass die Zustände $|nlmm_s\rangle$ Eigenzustände dieses Hamilton-Operators sind und berechnen Sie die zugehörigen Energie-Eigenwerte. Wie sieht die Aufspaltung der Energieniveaus mit $n = 1$ und $n = 2$ aus? Wird die Entartung des $n = 2$ -Niveaus ganz aufgehoben?

- (b) Da im Limes des normalen Zeeman-Effektes die relativistischen Korrekturen im Vergleich zur magnetfeldabhängigen Aufspaltung klein sind, kann der Effekt der relativistischen Korrekturen in Störungstheorie behandelt werden. Berechnen Sie die weitere Verschiebung oder Aufspaltung der Niveaus durch die Spin-Bahn Kopplung

$$\hat{H}_{\text{so}} = \frac{1}{2m^2c^2} \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{l}} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} V(r) \right),$$

mit $V(r) = -e^2/r$.

1. Hinweis: Benützen Sie die Identität $\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{s}} = \frac{1}{2}(\hat{l}_+\hat{s}_- + \hat{l}_-\hat{s}_+) + \hat{l}_z\hat{s}_z$. 2. Hinweis: Benützen Sie die Mittelwerte

$$\langle nlmm_s | r^{-3} | nlmm_s \rangle = \frac{2Z^3}{l(l+1)(2l+1)n^3a_0^3}$$

für $l > 0$.

Für den “anomalen Zeeman-Effekt” ist die magnetische Energie viel kleiner als die Feinstruktur-Aufspaltung. Für diesen Effekt wird zuerst die Feinstruktur-Aufspaltung betrachtet. Die weitere Aufspaltung durch das Magnetfeld wird nachträglich in Störungstheorie behandelt.

- (c) Mit den relativistischen Korrekturen werden die gebundenen Eigenzustände $|njl m_j\rangle$ des Wasserstoffatoms durch Quantenzahlen n , j , l , und m_j enumeriert, wobei $j = l \pm 1/2$ und

$$E_{nj} = -\frac{e^2}{2a_0 n^2} \left[1 - \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{3}{4} - \frac{n}{j + 1/2} \right) \right].$$

Berechnen Sie die weitere Aufspaltung dieser Energieniveaus durch den Zeeman-Effekt für den Fall $l = 1$.

Hinweis: Benützen Sie Ihre Lösung von Aufgabe 10.1.

Aufgabe 10.3: Harmonischer Oszillator in zeitabhängigem elektrischen Feld

Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator der Masse m , Ladung e und Frequenz ω in einem zeitabhängigen elektrischen Feld $E(t)$.

- (a) Geben Sie den Hamilton-Operator für dieses System an.

Der Oszillator sei im Energie-Eigenzustand $|n\rangle$ zum Zeitpunkt $t = 0$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Oszillator zu einem Zeitpunkt $t \rightarrow \infty$ in einem anderen Energie-Eigenzustand $|n'\rangle$ gefunden wird für den Fall, dass

(b) $E(t) = E_0 e^{-\gamma t}$ (mit $\gamma > 0$),

(c) $E(t) = E_0 \gamma^{-1} \delta(t - t_0)$ (mit $t_0 > 0$).