# 2 Komplexe Vektorräume

*Übungen, die nach Richtigkeit korrigiert werden:*

*Aufgabe 2.1: Komplexer Vektorraum*

In einem zwei-dimensionalen komplexen Vektorraum sei der Vektor

$$\boldsymbol{e} = c \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

definiert.

(a) Wählen Sie die Konstante $c$ reell, positiv, und so, dass $||\boldsymbol{e}|| = 1$.

(b) Finden Sie einen Vektor $\boldsymbol{e}'$, so dass $\boldsymbol{e}$ und $\boldsymbol{e}'$ zusammen eine orthonormale Basis für den Vektorraum bilden.

(c) Berechnen Sie $\hat{P}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{a}$, wobei $\hat{P}_{\boldsymbol{e}}$ die Projektion auf $\boldsymbol{e}$ ist und $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

*Übungen, die nach Aufwand korrigiert werden:*

*Aufgabe 2.2: Kompletter Satz*

In einem drei-dimensionalen komplexen Vektorraum seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ linare Operatoren. In der Standardbasis $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ werden diese zwei Operatoren durch die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt.

(a) Sind die Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ hermitesch?

(b) Sind die Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ vertauschbar?

(c) Der Operator $\hat{A}$ bildet alleine keinen "kompletten Satz". Erklären Sie dies.

(d) Der Operator $\hat{B}$ bildet alleine keinen "kompletten Satz". Erklären Sie dies.

(e) Zusammen bilden die Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ einen "kompletten Satz". Bestimmen Sie eine orthonormale Basis für den Vektorraum aus gemeinsamen Eigenvektoren für $\hat{A}$ und $\hat{B}$.

*Aufgabe 2.3: Dirac Notation*

Sei $V$ ein dreidimensionaler komplexer Vektorraum mit basis $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$.

(a) Ein linearer Operator $\hat{A}$ kann durch die Dirac Notation und auch durch als Matrix dargestellt werden. Welche Matrixdarstellung gehört zum Operator

$$\hat{A} = |2\rangle\langle 1| - |3\rangle\langle 2|?$$

(b) Berechnen Sie $\hat{A}|2\rangle$.

(c) Der lineare Operator $\hat{B}$ wird durch die Matrixdarstellung

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wie lautet dieser Operator in der Dirac Notation?

(d) Zeigen Sie, dass $\hat{B} = \hat{P}_{|1\rangle}$ die Projektion auf den Basisvektor $|1\rangle$ ist.

*Aufgabe 2.4: Quadratintegrable Funktionen*

Eine Funktion $F(x)$ wird "quadratintegrabel" genannt, wenn das Integral

$$||F||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx |F(x)|^2$$

besteht. In diesem Fall, wird $||F||$ der "Norm" der Funktion $F$ genannt. Welche der folgenden Funktionen in einer Dimension sind quadratintegrabel?

(a) $F(x) = e^{ax}$, mit $a > 0$,

(b) $F(x) = e^{-ax^2+ibx}$, mit $a > 0$ und $b$ reell,

(c) $F(x) = \Theta(x)\Theta(1-x)$, wobei $\Theta(x)$ die "Theta Funktion" ist, $\Theta(x) = 1$ für $x > 0$ und $\Theta(x) = 0$ für $x < 0$.