3 Hilbertraum und Grundlagen der Quantenmechanik

Übungen, die nach Richtigkeit korrigiert werden:

Aufgabe 3.1: Wellenfunktion

Der quantenmechanische Zustand eines eindimensionalen Teilchens sei von der Wellenfunktion

$$\psi(x) = \frac{1}{b} e^{-|x|/2a}.$$

beschrieben, wobei $a > 0$ und b Konstanten sind.

(a) Berechnen Sie b, damit $\psi(x)$ auf eins normiert ist.

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $P(x)$, dass bei einer Ortsmessung das Teilchen am Ort x gefunden wird.

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $P(p)$, dass bei einer Impulsmessung der Wert p gefunden wird.

Übungen, die nach Aufwand korrigiert werden:

Aufgabe 3.2: Drehimpuls

Betrachten Sie den Operator $\hat{\boldsymbol{l}} = (\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z)$, mit

$$\hat{\boldsymbol{l}} = \hbar \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}},$$

wobei $\hat{\boldsymbol{p}} = -i\hbar\hat{\nabla}$. [Das heisst, $\hat{l}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y$, $\hat{l}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z$, $\hat{l}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$.]

(a) Zeigen Sie, dass $\hat{\boldsymbol{l}}$ hermitesch ist.

(b) Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{l}_x, \hat{l}_y]$.

(c) Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{l}_z, \hat{\boldsymbol{l}}^2]$, wobei $\hat{\boldsymbol{l}}^2 = \hat{l}_x^2 + \hat{l}_y^2 + \hat{l}_z^2$.

(d) Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{\Delta}, \hat{l}_z]$, wobei $\hat{\Delta}\psi(\boldsymbol{r}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(\boldsymbol{r})$.

(e) Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{r}, \hat{l}_z]$, wobei $\hat{r}\psi(\boldsymbol{r}) = r\psi(\boldsymbol{r})$.

Aufgabe 3.3: Paritätsoperator

Der Paritätsoperator $\hat{P}$ ist durch

$$\hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$$

definiert.

(a) Beweisen Sie, dass $\hat{P}$ hermitesch ist.

(b) Beweisen Sie, dass $\hat{P}^2 = \hat{1}$.

(c) Was sind die Eigenwerte von $\hat{P}$? Wie kann man die Eigenfunktionen beschreiben?

Aufgabe 3.4: Kontinuierliche lineare Superposition

Betrachen Sie eine kontinuierliche Zahl von Funktionen $F_k(x)$ mit Delta-Funktion Normierung,

$$(F_k, F_{k'}) = \delta(k - k').$$

(a) Zeigen Sie, dass die "kontinuierliche lineare Superposition"

$$f(x) = \int dk \phi(k) F_k(x),$$

mit $\phi(k)$ einer quadratintegrablen Funktion, quadratintegrabel ist und berechnen Sie die Norm $||f||$.

(b) Ein konkretes Beispiel sind die Funktionen $F_k(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{ikx}$. In diesem Fall, wird die kontinuierliche lineare Superposition auch "Wellenpaket" genannt. Wenn $\phi(k)$ eine Gaussfunktion ist,

$$\phi(k) = \frac{1}{(2\pi\sigma_k^2)^{1/4}} e^{-(k-k_0)^2/4\sigma_k^2},$$

spricht man von einem "Gaussschen Wellenpaket". Berechnen Sie die Funktion $f(x)$ in diesem Fall.