

4 Grundlagen der Quantenmechanik

Übungen, die nach Richtigkeit korrigiert werden:

Aufgabe 4.1: Drehimpuls

Betrachten Sie den Drehimpuls $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ eines quantenmechanischen Teilchens in drei Dimensionen. In der Quantenmechanik wird $\mathbf{l}$ durch den Operator $\hat{\mathbf{l}} = \hbar \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{k}}$ dargestellt. Insbesondere gilt, dass

$$\hat{l}_z = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi},$$

wobei (r, θ, ϕ) Kugelkoordinaten sind.

- (a) Das Spektrum des Operators $\hat{l}_z$ besteht aus den Werten $m\hbar$, wobei m ganzzahlig ist. Was sind die mögliche Ergebnisse einer Messung der z -Komponente des Impulses l_z ?
- (b) Im Allgemeinen sagt die Quantenmechanik nicht das Ergebnis einer Messung voraus, sondern nur die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses. Nur bei besonderen Zuständen kann das Ergebnis einer Messung “scharf” sein, d.h., das Ergebnis der Messung kann mit 100% Wahrscheinlichkeit vorhergesagt werden. Gibt es einen Zustand $|\psi\rangle$, für den eine Messung der z -Komponente des Impulses l_z mit 100% Wahrscheinlichkeit das Ergebnis $\hbar$ hat? Wenn ja, geben Sie ein Beispiel für die Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r})$ eines solchen Zustandes.
- (c) Gibt es eine Basis von Zuständen, in denen die Observable l_z “scharf” ist?
- (d) Gibt es eine Basis von Zuständen, in denen alle drei Komponenten l_x , l_y und l_z “scharf” sind? (Wenn ja, dann werden l_x , l_y und l_z “kommensurabel” genannt. Wenn nein, dann sind diese Observablen “inkommensurabel”.)

Übungen, die nach Aufwand korrigiert werden:

Aufgabe 4.2: Eindimensionales Teilchen

Ein “eindimensionales” Teilchen sei von der normierten Wellenfunktion

$$\psi(x) = \left(\frac{a}{\pi} \right)^{1/4} e^{-ax^2/2}, \quad a > 0,$$

beschrieben.

- (a) Was ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $P(x)dx$ bei einer Ortsmessung des Teilchen im Intervall $[x, x + dx]$ zu finden?
- (b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\bar{x}$ und die Streuung Δx .
- (c) Was ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $P(p)dp$ bei einer Impulsmessung ein Impuls im Intervall $[p, p + dp]$ zu finden?
- (d) Berechnen Sie den Erwartungswert $\bar{p}$ und die Abweichung Δp aus der Wahrscheinlichkeitsdichte $P(p)dp$, die Sie in (c) berechnet haben.
- (e) Berechnen Sie $\bar{p}$ und Δp direkt, mit den Formeln

$$\bar{p} = \langle \psi | p | \psi \rangle, \quad \Delta p^2 = \langle \psi | (p - \bar{p})^2 | \psi \rangle.$$

Aufgabe 4.3: Erhaltene Observablen

- (a) Sind die Impulskomponenten p_x , p_y und p_z für ein freies Teilchen erhalten?
- (b) Sind die Ortskomponenten x , y , und z für ein freies Teilchen erhalten?
- (c) Sind die Impulskomponenten p_x , p_y und p_z für ein Teilchen in einem Potentialfeld $V(x, y)$ erhalten?

Aufgabe 4.4: Periodische Randbedingungen

Betrachten Sie den Hilbertraum $\mathcal{H}$ der Funktionen $F(x)$ mit periodischen Randbedingungen $F(x) = F(x + L)$. Das Skalarprodukt auf $\mathcal{H}$ ist definiert durch

$$(F, G) = \int_0^L dx F^*(x) G(x).$$

Beweisen Sie, dass $\hat{p}_x = -i\hbar\partial/\partial x$ in diesem Hilbertraum ein hermitescher Operator ist.