5 Quantenmechanik in einer Dimension

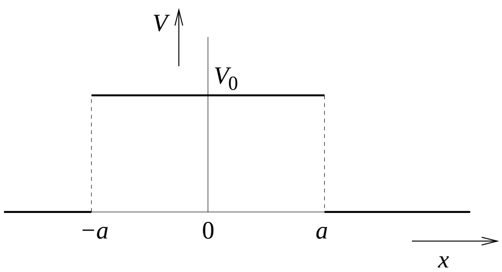
Übungen, die nach Richtigkeit korrigiert werden:

Aufgabe 5.1: Potentialschwelle

Betrachten Sie ein Teilchen mit Masse m in einem Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -a, \\ V_0 & \text{für } -a < x < a, \\ 0 & \text{für } x > a, \end{cases}$$

mit $V_0 > 0$.



(a) Begründen Sie, dass alle Energie-Eigenwerte $E \geq 0$.

(b) Geben Sie die allgemeine Form der Energie-Eigenfunktionen $\psi_k(x)$ in den drei Teil-Gebieten $x < -a$, $-a < -x < a$, und $x > a$ an. Betrachten Sie die Fälle $E < V_0$ und $E > V_0$ getrennt und benützen Sie folgende Definitionen:

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{\tfrac{2mE}{\hbar^2}}, & K_0 &= \sqrt{\tfrac{2mV_0}{\hbar^2}}, \\ \kappa &= \sqrt{\tfrac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}, & K &= \sqrt{\tfrac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}. \end{aligned}$$

(c) Geben Sie die Anschlussbedingungen bei $x = \pm a$ an.

(d) Begründen Sie, dass jeder Energie-Eigenwert E zweifach entartet ist.

Übungen, die nach Aufwand korrigiert werden:

Aufgabe 5.2: Lineares Potential

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m in einem eindimensionalen Potential $V(x) = -cx$, wobei $c > 0$.

(a) Ist das Energiespektrum für dieses Teilchen diskret, kontinuierlich, oder gemischt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Die Energie-Eigenzustände für dieses System lassen sich am günstigsten in der Impulsdarstellung bestimmen. In der Impulsdarstellung wird ein Zustand $|\psi\rangle$ von der Impuls-Zustandsfunktion

$$\psi(p) = \langle p|\psi\rangle, \quad |\psi\rangle = \int dp \psi(p)|p\rangle,$$

dargestellt, wobei $|p\rangle$ der (δ-Funktion normierte) Impulseigenzustand zum Eigenwert p ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Ortsoperator $\hat{x}$ in der Impulsdarstellung folgende Form annimt:

$$\hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p}.$$

(c) Bestimmen Sie die (passend normierten) Energie-Eigenfunktionen $\psi_E(p)$ dieses Teilchens.

Aufgabe 5.3: Tunneleffekt

Betrachten Sie ein Teilchen mit Masse m in dem Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -a, \\ V_0 & \text{für } -a < x < a, \\ 0 & \text{für } x > a, \end{cases}$$

mit $V_0 > 0$. In Problem 5.1 haben Sie gezeigt, dass zu jeder Energie $E > 0$ zwei linear unabhängige Energie-Eigenfunktionen mit Energie-Eigenwert $E = \hbar^2 k^2/2m$ gehören. Diese zwei Energie-Eigenfunktionen werden hier mit $\psi^+_{kR}(x)$ und $\psi^+_{kL}(x)$ bezeichnet.

(a) Begründen Sie, dass die zwei Energie-Eigenfunktionen so gewählt werden können, dass

$$\begin{aligned} \psi^+_{kR}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \begin{cases} e^{ikx} + re^{-ikx} & \text{für } x < -a, \\ te^{ikx} & \text{für } x > a, \end{cases} \\ \psi^+_{kL}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \begin{cases} te^{-ikx} & \text{für } x < -a, \\ e^{-ikx} + re^{ikx} & \text{für } x > a, \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Die Faktoren $t(E)$ und $r(E)$ werden Transmissions- und Reflektionsamplituden genannt. Warum?

(c) Berechnen Sie die Transmissions- und Reflektionsamplituden $t(E)$ und $r(E)$. Betrachten Sie die Fälle $E < V_0$ und $E > V_0$ getrennt.

(d) Zeichnen Sie den Transmissionskoeffizienten $T(E) = |t(E)|^2$ als Funktion von E, für eine Potentialschwelle mit $K_0 a = \pi$. Ihre Zeichnung soll das Verhalten des Transmissionskoeffizienten bei $E \approx 0$, $E \approx V_0$ und $E \gg V_0$ klar darstellen.

Ein sehr wichtiger Unterschied zwischen der quantenmechanischen Theorie und der klassischen Theorie ist, dass die quantenmechanische Transmissions-Wahrscheinlichkeit nicht null ist für $E < V_0$: Es gibt eine kleine, aber endliche Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen die Potentialschwelle durchdringt, auch wenn dies in der klassischen Mechanik nicht möglich ist. Dieser Effekt heisst der "Tunnel-Effekt".