6 Harmonischer Oszillator

Übungen, die nach Richtigkeit korrigiert werden:

Aufgabe 6.1: Harmonischer Oszillator

Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator der Masse m und Frequenz ω befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(|0\rangle - i\sqrt{2}|1\rangle + |2\rangle\right).$$

(Hierbei hat $|n\rangle$ die Standardbedeutung aus der Theorie des quantenmechanischen harmonischen Oszillators.)

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie.

(b) Bestimmen Sie $|\psi(t)\rangle$.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert $\overline{p}$ für den Impuls p zum Zeitpunkt $t = 0$.
Hinweis: Drücken Sie den Impulsoperator $\hat{p}$ mit Hilfe der Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ aus.

Übungen, die nach Aufwand korrigiert werden:

Aufgabe 6.2: Kohärente Zustände: Normierung und Vollständigkeit

Betrachten Sie die kohärenten Zustände

$$|z\rangle = e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

für ein Teilchen im harmonischen Oszillator Potential, mit z einer komplexen Zahl und $|n\rangle$ den Energie-Eigenzuständen, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(a) Berechnen Sie das Skalar-Produkt $\langle z'|z\rangle$. Sind kohärente Zustände orthonormal?

(b) Kohärente Zustände sind "über-vollständig":

$$\int dz|z\rangle\langle z| = \pi\hat{\underline{1}}.$$

Beweisen Sie dies.

Aufgabe 6.3: Gekoppelte Oszillatoren

Zwei gleiche eindimensionale Oszillatoren der Masse m und Frequenz ω_0 sind durch eine zu ihrem Abstand $x_1 - x_2$ proportionale attraktive Kraft $F = \kappa(x_1 - x_2)$ gekoppelt.

(a) Wie lauten die zugehörigen klassischen Bewegungsgleichungen und die klassische Gesamtenergie des Systems?

(b) Das entsprechende quantenmechanische Problem wird von einer Zustandsfunktion $\psi(x_1, x_2)$ beschrieben. Wie lautet die Schrödingergleichung für dieses Problem?

(c) Gewinnen Sie mittels Transformation auf Normalkoordinaten,

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2), \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2)$$

eine neue Schrödingergleichung, die Sie anschliessend durch einen Separationsansatz [d.h. durch eine Zustandsfunktion der Form $\psi_1(q_1)\psi_2(q_2)$] exakt lösen können.

(d) Wie lauten die Energie-Eigenwerte des Systems? Was lässt sich über die Symmetrie der Eigenfunktionen bezüglich des Vertauschens von x_1 und x_2 sagen?

Aufgabe 6.4: Delta-Funktion Potential

Die Transmissionsamplitude $t(E)$ für ein eindimensionales Teilchen mit Masse m, das von einem Delta-Funktion Potential $V(x) = -v_0\delta(x)$ gestreut wird, ist

$$t(E) = \frac{\hbar^2 k}{\hbar^2 k - imv_0}, \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}.$$

Zeigen Sie, dass dieses Ergebnis mit der Transmissionsamplitude $t_a(E)$ für eine Darstellung des Delta-Funktion Potentials,

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < -a, \\ -V_0 & -a < x < a, \\ 0 & x > a, \end{cases} \qquad V_0 = \frac{v_0}{2a},$$

im Limes $a \to 0$ übereinstimmt.
Hinweis: Für den eckigen Potentialtopf gilt:

$$t_a(E) = \frac{2kK}{2kK\cos(2Ka) - i(k^2 + K^2)\sin(2Ka)}, \quad K = \sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}}.$$