8 Quantenmechanik in drei Dimensionen (2)

Übungen, die nach Richtigkeit korrigiert werden:

Aufgabe 8.1: Anharmonischer Oszillator

Betrachten Sie ein eindimensionales Teilchen der Masse m im Potential

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 + ax^4,$$

wobei $a > 0$. Für $a = 0$ werden der Grundzustand und der erste angeregte Zustand von den Zustandsfunktionen

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} x_0^{1/2}} e^{-(x/x_0)^2/2}$$

bzw.

$$\psi_1(x) = \frac{x 2^{1/2}}{\pi^{1/4} x_0^{3/2}} e^{-(x/x_0)^2/2}$$

beschrieben. Berechnen Sie die ersten zwei Energieniveaus dieses anharmonischen Oszillators bis zur 1. Ordnung in a.

Übungen, die nach Aufwand korrigiert werden:

Aufgabe 8.2: Teilchen im Kugelsymmetrischen Potentialtopf

Betrachten Sie ein Teilchen mit Masse m im Zentralpotential

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{if } 0 \leq r < a, \\ 0 & \text{if } r \geq a, \end{cases}$$

mit $V_0 > 0$. Sie werden gebeten, Energie-Eigenzustände der zeitunabhängigen Schrödinger Gleichung

$$E\psi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\boldsymbol{r}) + V(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})$$

mit $E < 0$ zu finden. Zustände mit $E < 0$ sind gebundene Zustände, somit ist das Spektrum für $E < 0$ diskret. Die Zustandsfunktionen $\psi(\boldsymbol{r})$ werden als

$$\psi_{ln}(\boldsymbol{r}) = Y_{lm}(\theta, \phi)\frac{f_{ln}(r)}{r},$$

geschrieben, wobei $Y_{lm}(\theta, \phi)$ eine Kugelflächenfunktion ist. Hier ist m die magnetische Quantenzahl, l die Nebenquantenzahl und n eine Quantenzahl die die diskreten Energie-Eigenwerte E_{ln} und die zugehörende Eigenzustände enumeriert. (Es ist üblich, die Quantenzahl n als "Hauptquantenzahl" zu bezeichnen.)

(a) Wie lautet die radiale Schrödinger Gleichung für die Funktion $f_{ln}(r)$?

(b) Beschränken Sie sich auf Eigenzustände mit $m = l = 0$ (sogenannte "s-Zustände"). Was ist die Form der radialen Zustandsfunktion $f_{ln}(r)$ in diesem Fall? Geben Sie eine implizite Gleichung an, aus der die Energie-Eigenwerte E_{ln} berechnet werden können. Gibt es gebundene Eigenzustände für beliebige $V_0 > 0$?

Aufgabe 8.3: Wasserstoffatom

Berechnen Sie die Erwartungwerte $\overline{r}$ und $\overline{r^2}$ für das Wasserstoffatom

(a) im Grundzustand ($n = 1$, $l = 0$),

(b) in einem angeregten Zustand mit $n = 2$ und $l = 1$. Hängt Ihre Antwort von der magnetischen Quantenzahl m ab?

Aufgabe 8.4: Rotator

Betrachten Sie einen "Rotator" mit Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{l}}^2}{2I} + Bl_z + Cl_y,$$

wobei $C \ll B$.

(a) Berechnen Sie die Energie-Eigenwerte und ihre Entartung im Fall $C = 0$.

(b) Betrachten Sie nun den Fall $C \neq 0$. Benützen Sie Störungstheorie, um die Energie-Eigenwerte bis zur 2. Ordnung in C/B auszurechnen.

(c) Können Sie die Energie-Eigenwerte für den Fall $C \neq 0$ auch exakt ausrechnen? Wenn ja, vergleichen Sie Ihre Antwort zu (b) mit der exakten Lösung.