

9 Translationen und Rotationen

Übungen, die nach Richtigkeit korrigiert werden:

Aufgabe 9.1: Drehungen

Der quantenmechanische Rotationsoperator $\hat{R}_{\eta, \mathbf{e}}$ dreht einen Zustand $|\psi\rangle$ um den Winkel η um die Achse $\mathbf{e}$. Der Operator $\hat{R}_{\eta, \mathbf{e}}$ ist mit dem Drehimpulsoperator $\hat{\mathbf{j}}$ verwandt durch die Beziehung

$$\hat{R}_{\eta, \mathbf{e}} = e^{-i\eta \mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{j}} / \hbar}.$$

Betrachten Sie nun die Wirkung des Rotationsoperators auf einen “Rotator”, d.h. ein Teilchen, das ausschließlich Rotationsfreiheitsgrade hat.

- (a) Zeigen Sie, dass $\hat{R}_{\eta, \mathbf{e}}$ die Größe $\mathbf{j}^2$ des Drehimpulses nicht ändert.
- (b) Der allgemeine normierte Zustand eines Rotators mit Drehimpuls $j = 1$ ist

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-1}^1 a_m |1, m\rangle,$$

wobei $|a_{-1}|^2 + |a_0|^2 + |a_1|^2 = 1$. Berechnen Sie den Zustand $\hat{R}_{\eta, \mathbf{e}_z} |\psi\rangle$, der sich aus $|\psi\rangle$ durch Drehung um die z -Achse ergibt.

Aufgabe 9.2: Spin 1/2 in einem Magnetfeld

Betrachten Sie einen “Spin 1/2”, d.h., einen Rotator mit Drehimpuls $j = 1/2$, in einem Magnetfeld $\mathbf{B} = B \mathbf{e}_z$. Das magnetische Moment dieses Teilchens ist $\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{s}$, wobei $\gamma = eg/2mc$ das gyromagnetische Verhältnis ist und $g = 2$ der “g Faktor”. Die Energie dieses Teilchens im Magnetfeld ist $H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Spin 1/2 in dem $\hat{s}_x$ -Eigenzustand

$$|\psi(t=0)\rangle = \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(0) \\ \psi_{\downarrow}(0) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie $|\psi(t)\rangle$ durch eine Lösung der Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}|\psi\rangle.$$

- (b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\overline{s_x(t)}$, $\overline{s_y(t)}$ und $\overline{s_z(t)}$.

Übungen, die nach Aufwand korrigiert werden:

Aufgabe 9.3: Translationen

In einer alternativen Beschreibung der Quantenmechanik, wird der Impulsoperator $\mathbf{p}$ als Erzeuger der Translationen eingeführt. Hierzu betrachtet man den Operator $\hat{T}_{\mathbf{a}}$, der einen quantenmechanischen Zustand $|\psi\rangle$ um eine Strecke $\mathbf{a}$ verschiebt,

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = \hat{T}(\mathbf{a})|\psi\rangle, \quad \psi'(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r} - \mathbf{a}, t).$$

Der Impulsoperator ist dann durch die Beziehung

$$\hat{T}(\mathbf{a}) = e^{-i\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{p}}/\hbar}$$

definiert.

- (a) Zeigen Sie, dass aus dieser Definition folgt, dass die Komponenten $\hat{p}_x$, $\hat{p}_y$ und $\hat{p}_z$ des Impulsoperators vertauschbar sind.
- (b) Zeigen Sie, dass die Wahl des Koeffizienten $\hbar$ im Exponenten mit der de-Broglie Hypothese übereinstimmt.

Man kann auch “Translationen in der Zeit” betrachten. Sei $\hat{U}(\tau)$ der Operator, der die zeitliche Entwicklung eines Zustandes über ein Zeitintervall τ beschreibt,

$$|\psi(t + \tau)\rangle = \hat{U}(\tau)|\psi(t)\rangle.$$

Dieser Operator führt so zu der Definition eines Energieoperators $\hat{H}$,

$$\hat{U}(\tau) = e^{-i\tau\hat{H}/\hbar}.$$

- (c) Leiten Sie die Schrödinger Gleichung aus dieser Definition ab.
- (d) Zeigen Sie, dass die Wahl des Koeffizienten $\hbar$ im Exponenten mit der de-Broglie Hypothese übereinstimmt.

Aufgabe 9.4: Darstellungen der Drehimpuls-Operatoren

Aus den Gleichungen

$$\hat{j}_{\pm}|jm\rangle = \hbar\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|jm \pm 1\rangle, \quad \hat{j}_z|jm\rangle = \hbar m|jm\rangle$$

geht hervor, dass die Wirkung der Komponenten $\hat{j}_x$, $\hat{j}_y$ und $\hat{j}_z$ des Drehimpuls-Operators nur die magnetische Quantenzahl m betrifft; Andere Quantenzahlen (z.B., die Nebenquantenzahl j oder die Hauptquantenzahl n) sind nicht betroffen. Auf Grund dieser Beobachtung können die Komponenten $\hat{j}_x$, $\hat{j}_y$ und $\hat{j}_z$ bei festem j -Wert durch Matrizen dargestellt werden. Hierzu schreibt man einen allgemeinen Zustand mit Nebenquantenzahl j als

$$|\psi\rangle = \sum_{m=-j}^j a_m |jm\rangle$$

und bildet aus den $2j + 1$ Koeffizienten a_m einen Vektor,

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_j \\ a_{j-1} \\ \vdots \\ a_{-j+1} \\ a_{-j} \end{pmatrix}.$$

Die Wirkung der Komponenten $\hat{j}_x$, $\hat{j}_y$ und $\hat{j}_z$ des Drehimpuls-Operators kann dann durch eine $2j + 1$ -dimensionale Matrix dargestellt werden.

Ein Beispiel ist der Fall $j = 1/2$, wo die Operatoren $\hat{j}_x$, $\hat{j}_y$ und $\hat{j}_z$ durch die Pauli Matrizen dargestellt werden, $j_i = (\hbar/2)\sigma_i$, $i = x, y, z$, wobei

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie nun die Matrix-Darstellungen für die Operatoren $\hat{j}_x$, $\hat{j}_y$ und $\hat{j}_z$ für

(a) $j = 0$,

(b) $j = 1$

und überprüfen Sie, dass Ihre Matrix-Darstellung den Kommutationsrelationen für Drehimpuls-Operatoren genügt.