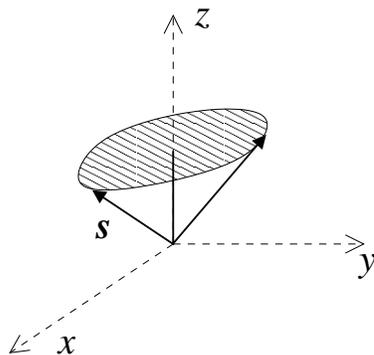


13.5 Weitere Eigenschaften des Spin 1/2

1. Die Zustände $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ sind zwar Eigenzustände der z -Komponente \hat{s}_z des Spin-Operators \mathbf{s} , sie stellen aber keine Zustände dar, in der der Drehimpuls nur in die z -Richtung zeigt.

Denn: \hat{s}_x^2 und $\hat{s}_y^2 = \frac{1}{4}\hbar^2$ in den Zuständen $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ (so wie in jedem Zustand). Man kann das graphisch so darstellen:



2. Der Operator $\mathbf{s} \cdot \mathbf{e}$ stellt die Komponente des Spin \mathbf{s} in der Richtung eines beliebigen Einheitsvektors \mathbf{e} dar. Wenn wir schreiben

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix},$$

dann findet man, dass der Operator $\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{e}$ in Spinor-Notation durch die 2×2 Matrix

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{e} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

dargestellt wird. Die Eigenwerte dieser Matrizen sind $\pm\hbar/2$ und die Eigenzustände sind (bis auf einen beliebigen Phasenfaktor):

$$\begin{aligned} \cos(\theta/2) |\uparrow\rangle + \sin(\theta/2) e^{i\phi} |\downarrow\rangle & \quad \text{zum Eigenwert } \hbar/2, \\ \sin(\theta/2) e^{-i\phi} |\uparrow\rangle - \cos(\theta/2) |\downarrow\rangle & \quad \text{zum Eigenwert } -\hbar/2. \end{aligned}$$

Insbesondere sind die Eigenzustände zu \hat{s}_x und \hat{s}_y :

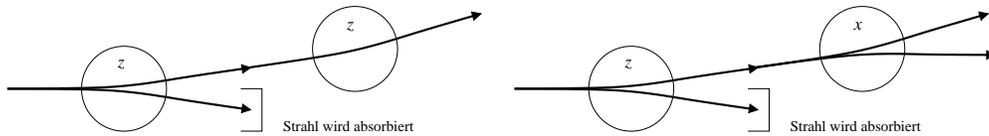
$$\hat{s}_x : \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) & \text{zum Eigenwert } \hbar/2, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) & \text{zum Eigenwert } -\hbar/2, \end{cases}$$

$$\hat{s}_y : \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle) & \text{zum Eigenwert } \hbar/2, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} (i|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) & \text{zum Eigenwert } -\hbar/2. \end{cases}$$

13.5.1 Anwendung: Sequentielles Durchlaufen eines Stern-Gerlach-Apparates

Wir betrachten nun einen Atomstrahl, der mehrere Stern-Gerlach Magneten sequentiell durchläuft. Durch rotieren des Apparats, kann nicht nur die z -Komponente des Spins s_z gemessen werden, sondern auch s_x . (Da \hat{s}_x und \hat{s}_z nicht vertauschbar sind, ist es nicht möglich, beide Komponente gleichzeitig, d.h. im gleichen Magnet, zu messen.)

Der erste Stern-Gerlach Apparat ist so ausgerichtet, dass eine Messung von s_z stattfindet. (Magnetfeld \mathbf{B} in der z -Richtung im Zentrum des Magnets und Gradient $\partial B_z/\partial z \neq 0$.) Der eintretende Atomstrahl wird dann in zwei Strahlen mit gleicher Intensität aufgespaltet. Der Atomstrahl mit Atomen mit $s_z = -\hbar/2$ wird absorbiert, der Atomstrahl mit Atomen mit $s_z = \hbar/2$ wird in ein zweites Stern-Gerlach weitergeleitet.



Wir vergleichen nun den Fall, in dem der zweite Apparat ebenso eine Messung von s_z ausführt, und den Fall, in dem der zweite Apparat eine Messung von s_x ausführt. (Im letzten Fall: Magnetfeld \mathbf{B} im zweiten Apparat in der x -Richtung im Zentrum des Magnets und Gradient $\partial B_x/\partial x \neq 0$.)

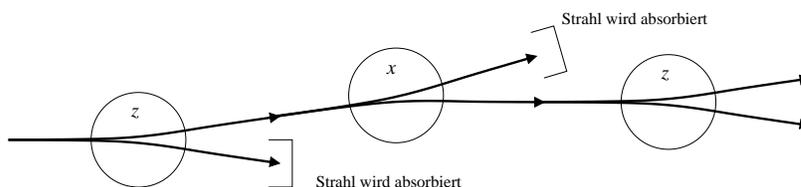
1. Nach dem Durchlaufen des 1. Stern-Gerlach Apparates gibt es nur H-Atome im s_z -Eigenzustand mit Eigenwert $\frac{1}{2}\hbar$. Deshalb erfolgt keine weitere Aufspaltung des Atomstrahls wenn das zweite Stern-Gerlach Apparat wiederholt s_z misst.
2. Im Fall, dass der 2. Stern-Gerlach Apparat die x -Komponente s_x misst, ist es hilfreich, die Spin-Zustände der Elektronen, die sich nach dem Durchlaufen des 1. Stern-Gerlach Magnets im "oberen", durchgelassenen Strahl befinden, in der Basis von \hat{s}_x -Eigenspinoren $|\pm\rangle_x$ zu schreiben. Die \hat{s}_x -Eigenzustände $|\pm\rangle_x$ sind

$$|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_z \pm |\downarrow\rangle_z), \quad \text{zu dem Eigenwert } \pm\hbar/2,$$

wobei $|\uparrow\rangle_z$ der \hat{s}_z -Eigenspinor zum Eigenwert $\hbar/2$ ist. Hieraus folgt, dass

$$|\uparrow\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_x + |-\rangle_x).$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine s_x -Messung in diesem Zustand das Ergebnis $\pm\hbar/2$ gibt ist je 1/2. Deshalb wird der Atomstrahl beim Durchlaufen in zwei Atomstrahlen mit gleicher Intensität aufgespaltet.



3. Wenn einer von diesen Atomstrahlen nun in einen dritten Stern-Gerlach Apparat, der wieder s_z misst, geführt wird, so wird der Atomstrahl wieder in zwei Strahlen mit gleicher Intensität aufgespalten. Der Grund ist, dass die Atome in einem der beiden \hat{s}_x Eigenzustände $|\pm\rangle_x$ sind nach der Messung von s_x im 2. Stern-Gerlach Apparat. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Messung von s_z das Ergebnis $\pm\hbar/2$ gibt ist je 1/2 (für beide Strahlen separat).

13.5.2 Anwendung: Larmor Präzession

Betrachte ein Spin 1/2 in einem (homogenen) Magnetischen Feld $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$.

- Die klassische Bewegungsgleichung ist:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}_0,$$

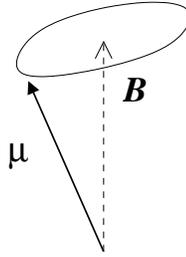
wobei

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{eg}{2mc} \mathbf{s}$$

mit $g = 2$ das klassische magnetische Moment ist. Hieraus folgt, dass

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \frac{eg}{2mc} \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}_0 = \omega_L \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{e}_z.$$

Diese Gleichung beschreibt eine Präzession mit Larmor Frequenz $\omega_L = egB_0/2mc = \gamma B_0$. ($\gamma = eg/2mc$: gyromagnetisches Verhältnis.)



- Quantenmechanisch, wird dieser Spin durch den Hamilton-Operator

$$\hat{H} = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B} = -\frac{egB_0}{2mc} \hat{s}_z = -\frac{1}{2} \hbar \omega_L \sigma_z$$

beschrieben, wobei $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \gamma \hat{\mathbf{s}}$ der quantenmechanische Operator zum magnetischen Moment ist und $\omega_L = egB_0/2mc$ die Larmor Frequenz. Die Energie-Eigenzustände sind die \hat{s}_z -Eigenzustände $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ und die zugehörigen Energie-Eigenwerte sind $-\hbar\omega_L/2$ bzw. $\hbar\omega_L/2$, mit $\omega_L = egB_0/2mc$. Die Zeitabhängigkeit der Energie-Eigenzustände $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ wird dann durch

$$|\uparrow(t)\rangle = e^{i\frac{\omega_L t}{2}} |\uparrow\rangle, \quad |\downarrow(t)\rangle = e^{-i\frac{\omega_L t}{2}} |\downarrow\rangle$$

gegeben.

Wenn wir zum Zeitpunkt $t = 0$ den Spin-Zustand als Eigenzustand von $\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{e}$, mit \mathbf{e} ein beliebiger Einheitsvektor, wählen, d.h.

$$|\psi(t=0)\rangle = \cos\frac{\theta}{2} |\uparrow\rangle + \sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi} |\downarrow\rangle,$$

wobei θ und ϕ die Polarwinkel zu \mathbf{e} sind, dann finden wir

$$|\psi(t)\rangle = \left(\cos\frac{\theta}{2} |\uparrow\rangle + \sin\frac{\theta}{2} e^{i(\phi - \omega_L t)} |\downarrow\rangle \right) e^{i\frac{\omega_L t}{2}}.$$

Dieser Zustand beschreibt eine Präzession des Spins um die z -Achse mit Frequenz ω_L .

Bemerkung: Der oben herausgezogene Phasenfaktor $e^{i\frac{\omega_L t}{2}}$ ist ohne physikalische Bedeutung.

13.5.3 Anwendung: Magnetische Resonanz

Zum zeitunabhängigen Feld \mathbf{B}_0 in z -Richtung, addieren wir nun ein schwaches, zirkular polarisiertes Magnetfeld $\mathbf{B}_1(t)$ senkrecht zu \mathbf{B}_0 :

$$\mathbf{B}_1(t) = B_1 [\cos(\omega_1 t) \mathbf{e}_x - \sin(\omega_1 t) \mathbf{e}_y].$$

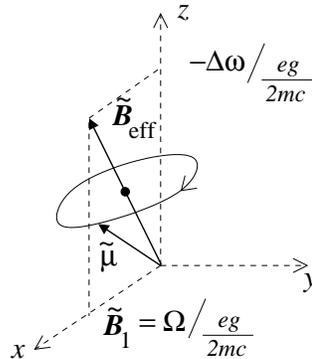
- Klassisch gilt wieder die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \frac{eg}{2mc} \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}(t).$$

Diese Gleichung lässt sich am Besten im Referenzsystem lösen, in dem \mathbf{B}_1 zeitunabhängig ist. Dieses Referenzsystem rotiert mit einer Winkel-Geschwindigkeit $-\omega_1$ um die z Achse. Das magnetische Moment im mit-rotierenden Referenzsystem wird mit $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ bezeichnet und genügt der Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\boldsymbol{\mu}}}{dt} &= \left[\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} + \omega_1 \mathbf{e}_z \times \boldsymbol{\mu}(t) \right] \text{ im mit-rotierenden Referenzsystem} \\ &= \tilde{\boldsymbol{\mu}}(t) \times (\Omega \mathbf{e}_x - \Delta\omega \mathbf{e}_z). \end{aligned}$$

Hier ist $\Omega = egB_1/2mc$ die ‘‘Rabi Frequenz’’ und $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_L$. Diese Gleichung beschreibt eine Präzession um ein ‘‘effektives Magnetfeld’’ $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{eff}} = (\Omega \mathbf{e}_x - \Delta\omega \mathbf{e}_z)/(eg/2mc)$ mit Frequenz $\Omega' = \sqrt{(\Delta\omega)^2 + \Omega^2}$. Resonanz tritt auf, wenn $\Delta\omega = 0$. In diesem Fall findet die Präzession (im mit-rotierenden Referenzsystem) um die x Achse statt, und rotiert ein ursprünglich in der positiven z -Richtung ausgerichtetes magnetisches Moment ganz bis zur negativen z Richtung und zurück. Diese Rotation findet für beliebig schwache Felder $\mathbf{B}_1(t)$ statt. Experimentell wird Resonanz dadurch festgestellt, dass die Energie des zeit-abhängigen Magnetfeldes \mathbf{B}_1 bei der Frequenz $\omega_1 = \omega_L$ am stärksten absorbiert wird.



Erläuterung: Die Rotation des mit-rotierenden Referenzsystems wird durch die Rotationsmatrix $\mathcal{R}_{\eta(t)}$ beschrieben, wobei

$$\mathcal{R}_\eta = \begin{pmatrix} \cos \eta & -\sin \eta & 0 \\ \sin \eta & \cos \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und $\eta(t) = -\omega_1 t$. Man überprüft, dass $\mathbf{B}_1(t) = B_1 \mathcal{R}_{-\omega_1 t} \mathbf{e}_x$, so dass $\tilde{\mathbf{B}}_1 = \mathcal{R}_{\omega_1 t} \mathbf{B}_1(t) = B_1 \mathbf{e}_x$ zeitunabhängig ist. Dann gilt $\tilde{\boldsymbol{\mu}}(t) = \mathcal{R}_{\omega_1 t} \boldsymbol{\mu}(t)$, und damit auch:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\boldsymbol{\mu}}}{dt} &= \frac{d}{dt} \mathcal{R}_{\omega_1 t} \boldsymbol{\mu}(t) \\ &= \frac{d\mathcal{R}_{\omega_1 t}}{dt} \boldsymbol{\mu}(t) + \mathcal{R}_{\omega_1 t} \frac{d\boldsymbol{\mu}(t)}{dt} \\ &= \omega_1 \begin{pmatrix} -\sin(\omega_1 t) & -\cos(\omega_1 t) & 0 \\ \cos(\omega_1 t) & -\sin(\omega_1 t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{\mu}(t) + \frac{eg}{2mc} \mathcal{R}_{\omega_1 t} (\boldsymbol{\mu}(t) \times \mathbf{B}(t)) \\ &= \omega_1 \mathbf{e}_z \times \mathcal{R}_{\omega_1 t} \boldsymbol{\mu}(t) + \frac{eg}{2mc} (\mathcal{R}_{\omega_1 t} \boldsymbol{\mu}(t)) \times (\mathcal{R}_{\omega_1 t} \mathbf{B}(t)) \\ &= \omega_1 \mathbf{e}_z \times \tilde{\boldsymbol{\mu}} + \frac{eg}{2mc} \tilde{\boldsymbol{\mu}}(t) \times \tilde{\mathbf{B}} \\ &= \tilde{\boldsymbol{\mu}}(t) \times (\omega_L \mathbf{e}_z + \Omega \mathbf{e}_x - \omega_1 \mathbf{e}_z). \end{aligned}$$

- In der quantenmechanische Beschreibung eines Spin 1/2 ändert sich durch das Zufügen des zeit-abhängigen Magnetfeldes $\mathbf{B}_1(t)$ der Hamilton-Operator des Spins um

$$\hat{H}_1 = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B}_1(t) = -\frac{egB_1}{2mc} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\omega_1 t} \\ e^{-i\omega_1 t} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \hbar \Omega \begin{pmatrix} 0 & e^{i\omega_1 t} \\ e^{-i\omega_1 t} & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $\Omega = egB_1/2mc$ die Rabi Frequenz ist. Wir schreiben nun die Lösung der Schrödinger-Gleichung als

$$|\psi(t)\rangle = a_\uparrow(t) |\uparrow\rangle + a_\downarrow(t) |\downarrow\rangle$$

Dann finden wir aus der Schrödinger Gleichung $i\hbar d|\psi(t)\rangle/dt = \hat{H}|\psi(t)\rangle$, dass:

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} a_\uparrow(t) &= -\frac{\omega_L}{2} a_\uparrow(t) - \frac{\Omega}{2} e^{i\omega_1 t} a_\downarrow(t), \\ i \frac{d}{dt} a_\downarrow(t) &= -\frac{\Omega}{2} e^{-i\omega_1 t} a_\uparrow(t) + \frac{\omega_L}{2} a_\downarrow(t). \end{aligned}$$

Um diese Gleichungen zu lösen, setzen wir

$$\begin{aligned} b_{\uparrow}(t) &= a_{\uparrow}(t)e^{-i\omega_1 t/2}, \\ b_{\downarrow}(t) &= a_{\downarrow}(t)e^{i\omega_1 t/2}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Diese Transformation gleicht einer Transformation in das Ruhesystem des Feldes $\mathbf{B}_1(t)$.

Die Bewegungsgleichung für die Amplituden $b_{\uparrow}(t)$ and $b_{\downarrow}(t)$ wird dann:

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}b_{\uparrow}(t) &= \frac{\Delta\omega}{2}b_{\uparrow}(t) - \frac{\Omega}{2}b_{\downarrow}(t), \\ i\frac{d}{dt}b_{\downarrow}(t) &= -\frac{\Omega}{2}b_{\uparrow}(t) - \frac{\Delta\omega}{2}b_{\downarrow}(t), \end{aligned}$$

mit $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_L$. Wir lösen diese Gleichungen nun mit $|\psi(t=0)\rangle = |\uparrow\rangle$, d.h.

$$b_{\uparrow}(0) = 1, \quad b_{\downarrow}(0) = 0.$$

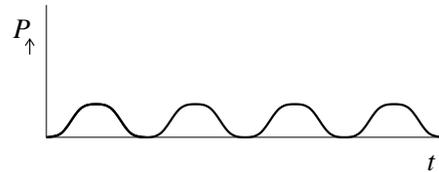
Die Lösung ist:

$$\begin{aligned} b_{\uparrow}(t) &= \cos\frac{\Omega't}{2} - \frac{i(\Delta\omega)}{\Omega'}\sin\frac{\Omega't}{2}, \\ b_{\downarrow}(t) &= \frac{i\Omega}{\Omega'}\sin\frac{\Omega't}{2}, \end{aligned}$$

wobei $\Omega' = \sqrt{(\Delta\omega)^2 + \Omega^2}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Messung des Spins zum Zeitpunkt t den Wert $-\hbar/2$ gibt, ist dann

$$P_{\downarrow}(t) = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + (\Delta\omega)^2} \sin^2\frac{\Omega't}{2}$$



Wenn $\Delta\omega = 0$, d.h. wenn die Frequenz ω_1 des zeit-abhängigen Magnetfeldes \mathbf{B}_1 und die Larmorfrequenz des Feldes \mathbf{B}_0 gleich sind, kann sogar $P_{\downarrow} = 1$ auftreten, auch für beliebig schwache Felder $\mathbf{B}_1(t)$!

Bemerkung: Der Fall eines schwachen zeitabhängigen Feldes $\mathbf{B}_1(t)$ mit linearer Polarisierung,

$$\mathbf{B}_1(t) = B_1 \cos(\omega_1 t)\mathbf{e}_x,$$

lässt sich dadurch lösen, dass man ein solches Feld als Linearkombination zweier Felder mit zirkularer Polarisierung, d.h. mit Frequenzen ω_1 und $-\omega_1$, betrachtet. Die Resonanzbedingung $\Delta\omega = 0$ kann nur für eine Frequenz erfüllt werden, und die Komponente des zeitabhängigen Feldes mit der entgegengesetzten Frequenz kann vernachlässigt werden. Diese Annäherung wird die “rotierende-Welle Annäherung” genannt (“rotating wave approximation”).